Гашков Сергей Борисович
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Много лет преподавал математику также в ФМШ №18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ).

Центры тяжести и стереометрия

Статья завершает цикл о применении в геометрии понятия центра масс. В ней рассказывается о его использовании для решения некоторых задач стереометрии, а также доказывается красивая теорема о центре масс поверхности произвольного тетраэдра.

Центроид тетраэдра

Многое из того, что написано в предыдущих статьях о центрах тяжести, можно из плоскости перенести без существенных изменений в пространство. Все аксиомы остаются без изменений[1].

Если четырёхточечная система равных масс расположена в пространстве, то она образует тетраэдр (не обязательно правильный). Для тетраэдра, аналогично сделанному выше, можно определить три *бимедианы*. Тогда аналогично уже доказанному можно убедиться в том, что центры всех бимедиан совпадают, причём совпадают с центроидом тетраэдра (см. рис. 1). Для тетраэдра эта теорема выглядит даже более естественно, чем для четырёхугольника.

Можно определить также *медианные плоскости* тетраэдра. Так называют любую из 6 плоскостей, проходящую через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра.

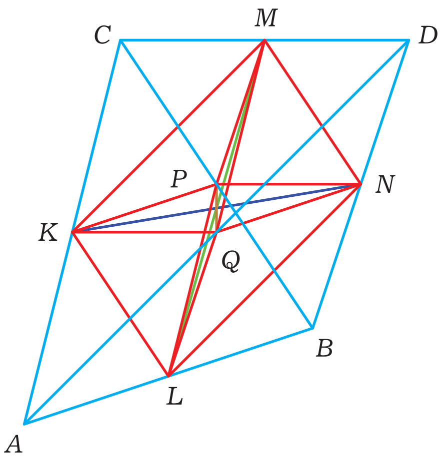

Рис. 1. Центроид тетраэдра совпадает с точкой пересечения бимедиан

Задача 1. *Докажите, что все медианные плоскости пересекаются в центроиде тетраэдра и каждая медианная плос-*

[1] Кроме аксиом 4, 5, которые придётся несколько модифицировать. Вместо оси симметрии надо взять плоскость симметрии, под вращением надо понимать вращение вокруг оси, а центр симметрии так и остаётся центром симметрии.

кость делит объём тетраэдра пополам.

Указание. Медианная плоскость содержит бимедиану. Перпендикуляры, опущенные на медианную плоскость из концов противоположного ребра, равны.

Теорема о срединном треугольнике также легко обобщается на случай тетраэдра (см. рис. 2).

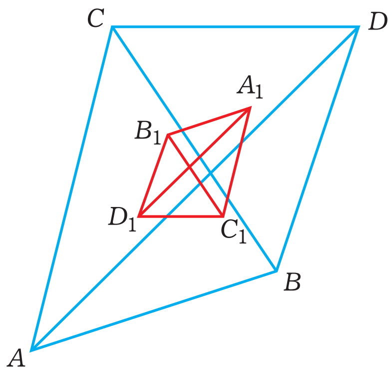

Рис. 2. Тетраэдр с вершинами в центроидах граней тетраэдра

Задача 2. *Докажите, что центры граней тетраэдра образуют тетраэдр, гомотетичный большему с коэффициентом 3 относительно общего центроида обоих тетраэдров. В этом центре пересекаются все медианы тетраэдра и делятся им в отношении* 3:1.

Указание. Если заменить массу в каждой вершине на три равные, то центр масс системы не изменится. Если его вычислять, заменяя три массы, лежащие в одной грани, на её центр, то получится система из четырёх утроенных масс, расположенных в вершинах срединного тетраэдра. У неё центр масс совпадает с центром масс исходной системы. Если же в исходной системе заменить любые три массы из одной грани на утроенную массу, расположенную в центре этой грани, то для нахождения центра масс исходной системы согласно аксиоме 2 надо будет отрезок, соединяющий вершину с центром рассмотренной противоположной грани (его можно назвать *медианой* тетраэдра, проведённой к этой грани), разделить в отношении 3 : 1 (точка деления расположена ближе к рассматриваемой грани, чем к противоположной к ней вершине). Отсюда следует, что все 4 медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, делятся в ней в отношении 3 : 1, и эта точка есть центроид тетраэдра (см. рис. 3).

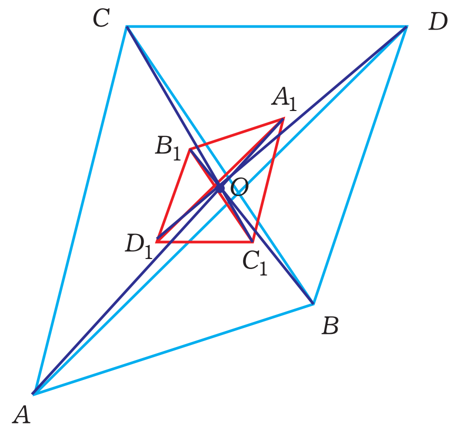

Рис. 3. Ещё один способ нахождения центра четырёх равных масс: он совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра

Задача 3. *Какие барицентрические координаты имеет центроид тетраэдра относительно этого тетраэдра?*

Ответ. (1:1:1:1).

Центр масс поверхности тетраэдра

Докажем, что он находится в центре шара, вписанного в срединный тетраэдр (эта теорема является стереометрическим аналогом теоремы о центре масс периметра треугольника).

Сначала напомним некоторые известные факты из геометрии тетраэдра (для тех, кто их не знает, они превращаются в задачи, решения которых можно найти в любом хорошем курсе стереометрии, например [2]). Напомним, что *биссектрисой трёхгранного угла* называется прямая, образующая равные углы с рёбрами трёхгранного угла. *Биссектральной плоскостью* двугранного угла называется плоскость, образующая с его гранями равные двугранные углы.

Задача 4. *Любая точка биссектрисы трёхгранного угла равноудалена от его граней.*

Следующие три задачи использоваться далее не будут и приводятся только для полноты.

Задача 5. *Любая точка биссектральной плоскости двухгранного угла равноудалена от его граней.*

Задача 6. *Биссектриса трёхгранного угла совпадает с пересечением его бисссектральных плоскостей.*

Доказательство указанной выше теоремы о центре масс поверхности тетраэдра, приведённое в [1], основывалось на следующем свойстве вписанного шара и некоторых механических соображениях.

Задача 7. *Центр вписанного шара тетраэдра находится в единственной точке пересечения его шести биссектральных плоскостей.*

Далее будет приведено другое доказательство, основанное на другом свойстве вписанного шара. Оно имеет преимущество, в частности, в том, что без существенных изменений может быть перенесено на произвольное n-мерное пространство.

Задача 8. *Центр вписанного шара тетраэдра находится в точке пересечения биссектрис его трёхгранных углов.*

Следующая задача является стереометрическим аналогом известного свойства, касающегося деления биссектрисой треугольника противоположной стороны, и интересна сама по себе.

Задача 9. *Биссектриса угла тетраэдра, ограниченного гранями с площадями S_i, $i = 1, 2, 3$, попадает в точку четвёртой грани, которая относительно трёх её вершин имеет барицентрические координаты $S_1 : S_2 : S_3$.*

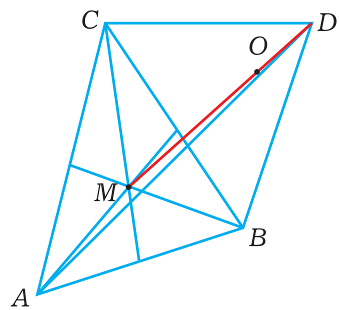

Рис. 4. Биссектриса трёхгранного угла при вершине D тетраэдра ABCD (с тремя равновеликими гранями при вершине B)

Указание. Обозначим вершины тетраэдра через A, B, C, D и через M – точку пересечения биссектрисы трёхгранного угла D с гранью ABC (см. рис. 4). Так как объём тетраэдра равен трети произведения площади основания на длину высоты, а высоты, опущенные из M на боковые грани тетраэдра $ABCD$, согласно свойству биссектрисы равны, то отношение объёмов тетраэдров $V(DBCM) : V(DACM) : V(DABM)$ равно отношению площадей треугольников $S(DBC) : S(DAC) : S(DAB)$, которое было обозначено как $S_1 : S_2 : S_3$. Но эти тетраэдры имеют общую высоту, опущенную на основания BCM, ACM, ABM, отношение площадей этих треугольников также равно $S_1 : S_2 : S_3$. Остаётся применить следующее утверждение: если точка внутри треугольника имеет барицентрические координаты ($\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$), то площади трёх треугольников, на которые он разбивается этой точкой, относятся друг к другу, как $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ (α_i – площадь треугольника, противоположного вершине с массой m_i), и обратно.

Докажем наконец, что центр тяжести поверхности тетраэдра находится в центре шара, вписанного в его срединный тетраэдр (см. рис. 5).

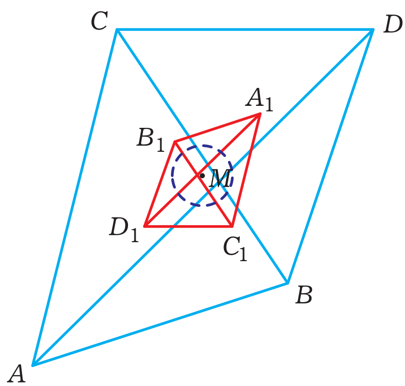

Рис. 5. Шар, вписанный в срединный тетраэдр, и построение центра масс поверхности тетраэдра

Заменим грани DAB, DBC, DAC, ABC на материальные точки с центрами в их центрах тяжести C_1, A_1, B_1, D_1 и массами, равными их площадям. Задача сводится к нахождению центра тяжести точек C_1, A_1, B_1, D_1 – вершин срединного тетраэдра. Площади граней DAB, DBC, DAC, ABC пропорциональны площадям граней $D_1A_1B_1$, $D_1B_1C_1$, $D_1A_1C_1$, $A_1B_1C_1$. Поэтому далее можно считать, что массы этих точек пропорциональны площадям противоположных им граней образованного ими тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ и для краткости индексы в обозначениях опускать. Заменим точки A, B, C одной точкой – их центром масс M. Если площади граней DBC, DAC, DAB обозначить через S_1, S_2, S_3 соответственно, то барицентрические координаты этой точки относительно треугольника ABC согласно задаче 2 будут равны $S_1 : S_2 : S_3$ (т. е. отношение площадей треугольников MBC, MAC, MAB равно отношению площадей граней DBC, DAC, DAB). Биссектриса трёхгранного угла D попадает в точности в точку M. Другими словами, отрезок MD совпадает с биссектрисой трёхгранного угла D. Но согласно используемой нами аксиоматике центр тяжести точек A, B, C, D совпадает с центром тяжести точек M, D и поэтому лежит на отрезке MD, т. е. биссектрисе угла D. Аналогично получаем, что он лежит и на биссектрисах трёх других углов, а значит, и на точке их пересечения. Но эта точка согласно задаче 7 совпадает с центром вписанной в рассматриваемый тетраэдр сферы, что и заканчивает доказательство теоремы.

Список литературы

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. – М.: URSS, 2011.
2. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия, т. 3. – М.: МЦНМО, 2006.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Из писем Петра Леонидовича Капицы

... Я твёрдо верю в интернациональность науки и верю в то, что настоящая наука должна быть вне всяких политических страстей и борьбы, как бы её туда не стремились вовлечь, и я верю, что научная работа, которую я делал всю жизнь, есть достояние всего человечества, где бы я её ни творил.