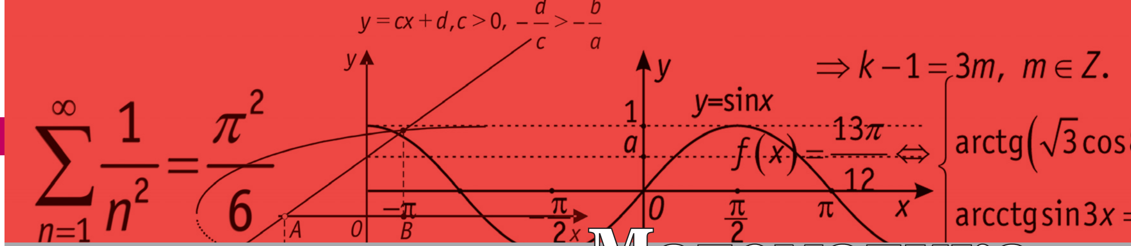




**Фалин Геннадий Иванович**
*Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Автор около 100 научных работ и 8 книг.*

**Фалин Анатолий Иванович**
*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Автор 5 книг и около 50 научных и учебно-методических* работ.

# Центральная симметрия и графики функций

Статья посвящена элементарным методам исследования функций и отысканию у их графиков центров симметрии.

## 1. Основные теоретические факты

Напомним, что точка $A'$ называется *симметричной* точке $A$ относительно точки $B$ *(центра симметрии)*, если точка $B$ является серединой отрезка $AA'$.

Так как при фиксированном центре симметрии $B$ для любой точки $A$ существует и притом единственная точка $A'$, симметричная $A$ относительно точки $B$, соответствие $A \to A'$ задаёт отображение $\Phi_B$ плоскости на себя, которое называют *центральной симметрией* относительно точки $B$.

Центральная симметрия, как и всякое отображение плоскости на себя, поточечно передвигает фигуры на плоскости. Поэтому можно говорить о фигуре $F' = \Phi_B(F)$, симметричной данной фигуре $F$ относительно центра $B$. Если фигура $F$ остаётся на месте при выполнении центральной симметрии относительно точки $B$, т. е. $\Phi_B(F) = F$, то она называется *симметричной* относительно этой точки.

Поскольку координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат его концов, центральная симметрия относительно точки $B$ с координатами $(x_0; y_0)$ характеризуется равенством

$$\Phi_{(x_0;\,y_0)}(x;\,y) = (2x_0 - x,\, 2y_0 - y). \quad (1)$$

Для будущих применений отметим также, что образ точки $A(x;\,y)$ при параллельном переносе $\Pi_{\vec{v}}$ на вектор $\vec{v} = (v_x;\, v_y)$ задаётся соотношением:

$$\Pi_{(v_x;\,v_y)}(x;\,y) = (x + v_x;\, y + v_y). \quad (2)$$

На координатной плоскости фигура $F$ обычно задаётся как множество точек, координаты которых удовлетворяют определённому уравнению $F(x,\,y) = 0$. Поэтому естественно возникает вопрос о том, каким уравнением может быть описан образ $F' = \Phi_{(x_0;\,y_0)}(F)$ фигуры $F$ при центральной симметрии с центром $(x_0;\,y_0)$. Для этого отметим, что точка $(x;\,y)$ принадлежит фигуре $F'$ тогда и только тогда, когда точка

$$\Phi_{(x_0;\,y_0)}(x;\,y) = (2x_0 - x,\, 2y_0 - y)$$

принадлежит фигуре $F$, т. е. верно равенство

$$F(2x_0 - x,\, 2y_0 - y) = 0. \quad (3)$$

Это означает, что фигура $F'$ задаётся уравнением (3).

В частном случае, когда фигура $F$ является графиком некоторой функции $y = f(x)$, её образом будет график функции

$$y = 2y_0 - f(2x_0 - x). \quad (4)$$

Соответственно, точка $(x_0;\,y_0)$ является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если функция (4) совпадает с $f(x)$, т. е. при всех $x$ верно равенство

$$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x).$$

Это равенство неявно предполагает, что и число $x$, и число $2x_0 - x$ входят в область определения функции $f(x)$. Чтобы особо подчеркнуть это обстоятельство, дадим расширенное определение центра симметрии графика функции.

*Точка* $(x_0;\,y_0)$ *является центром симметрии графика функции* $y = f(x)$, *если*

• область определения функции $D_f$ симметрична относительно точки $x_0$, т. е. если точка $x$ входит в область определения, то и точка $2x_0 - x$, симметричная $x$ относительно $x_0$, также входит в область определения;

• значения функции в точках $x$ и $2x_0 - x$ $(x \in D_f)$ симметричны относительно $y_0$, т. е. верно равенство

$$f(x) - y_0 = y_0 - f(2x_0 - x).$$

Иначе говоря, выражение

$$A = \frac{f(x) + f(2x_0 - x)}{2} \quad (5)$$

при всех $x \in D_f$ не зависит от $x$; значение этого выражения – это $y_0$ (в частности, если $x_0 \in D_f$, то $y_0 = f(x_0)$).

При решении задач иногда удобнее пользоваться слегка изменённой формой этого определения, которая получается при замене $x$ на $x_0 + x$. Тогда симметричность области определения функции относительно точки $x_0$ запишется в виде $(x_0+x)\in D_f \Leftrightarrow (x_0-x)\in D_f$, а (5) примет вид:

$$B=\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}\equiv y_0 \qquad (6)$$

для $(x_0+x)\in D_f$.

Для функций, графики которых имеют центр симметрии, справедливы следующие простые утверждения (их доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения).

**Теорема 1.** *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0;y_0)$, то функция $g(x)=$ $=f(x+a)+b$ имеет центр симметрии $(x_0-a;y_0+b)$.*

**Теорема 2.** *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0;y_1)$, функция $g(x)$ имеет центр симметрии $(x_0;y_2)$, то функция $h(x)=af(x)+bg(x)$ имеет центр симметрии $(x_0;ay_1+by_2)$.*

**Теорема 3.** *Если функция $f(x)$ имеет центр симметрии $(x_0;y_0)$, то функция $g(x)=f(x+x_0)-y_0$ является нечётной, а если некоторая функция $g(x)$ – нечётная, то, каковы бы ни были числа $x_0$ и $y_0$, функция $f(x)=g(x-x_0)+y_0$ имеет центр симметрии $(x_0;y_0)$.*

## 2. Примеры решения задач

**Задача 1.** (Ф-т почвоведения МГУ, 2004, июль, 7) Доказать, что график функции

$$f(x)=4x+\log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right) \qquad (7)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты $(x_0;y_0)$ этого центра симметрии.

**Решение.** Функция (7) определена тогда и только тогда, когда выполнено условие $\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}>0$. Решая это неравенство, мы получим, что $D_f=(-\infty;-5)\cup(-4;0)\cup(1;+\infty)$. Это множество имеет единственный центр симметрии: $x_0=-2$. Поэтому, если график функции (7) имеет центр симметрии $(x_0;y_0)$, то $x_0=-2$. Поскольку $x_0\in D_f$, то $y_0=f(x_0)=-8$, и для завершения доказательства достаточно показать, что выражение (5) не зависит от $x$ (этот факт сводится к простым преобразованиям с логарифмами).

**Задача 2.** (Мехмат МГУ, 1998, устный экзамен) При каких значениях $a$ график функции

$$\begin{aligned}y(x)&=(x+a)(|x+1-a|+\\&+|x-3|)-2x+4a\end{aligned} \qquad (8)$$

имеет центр симметрии?

**Решение.** Будем анализировать выражение (5). В нашем случае оно равно

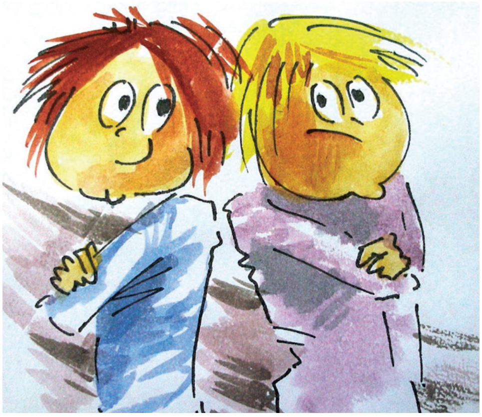
$$\begin{aligned}A&=\frac{x+a}{2}(|x+1-a|+|x-3|)-\\&-\frac{x-2x_0-a}{2}(|x-2x_0-1+a|+\\&+|x-2x_0+3|)-2x_0+4a.\end{aligned} \qquad (9)$$

При достаточно больших положительных $x$ все выражения под знаками модулей будут положительными, и поэтому выражение $A$ примет вид: $A=kx+b$, где $k=$ $=(a+4x_0-2)$, $b=4a-ax_0-4x_0^2$. Это выражение не зависит от $x$ тогда и только тогда, когда $k=0$; в этом случае свободный член – это $y_0$.

Значит, если график функции (8) имеет центр симметрии

$(x_0; y_0)$, то верны равенства $a + 4x_0 - 2 = 0$, $y_0 = 4a - ax_0 - 4x_0^2$. Отсюда можно выразить $x_0$ и $y_0$ через $a$: $x_0 = \frac{2-a}{4}$, $y_0 = \frac{9a-2}{2}$, и с помощью этих соотношений превратить равенство $y_0 = y(x_0)$ в уравнение относительно $a$:

$$\frac{3a+2}{16}\left(|5a-6| + |a+10|\right) = 0.$$



Поскольку выражения под знаками модулей в левой части этого уравнения одновременно не обращаются в 0, их сумма положительна. Значит, $a = -\frac{2}{3}$, а тогда

$$x_0 = \frac{2}{3},\ y_0 = -4.$$

Итак, если при некотором значении параметра $a$ график нашей функции имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$, то $a = -\frac{2}{3}$, $x_0 = \frac{2}{3}$, $y_0 = -4$.

Для завершения решения достаточно убедиться, что при этих значениях $a, x_0, y_0$ выражение (9) тождественно равно $y_0$.

**Ответ.** $a = -\frac{2}{3}$.

**Задача 3.** (Мехмат МГУ, устный экзамен, 2006) График функции $g(x)$ симметричен графику функции $f(x) = -2|x-3| - 2|x| + 3x - 3$ относительно точки (2; 2). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $f(x-a) = g(x+a)$ имеет бесконечно много решений.

**Решение.** Прежде всего с помощью равенства (4) найдём формулу, которой может быть задана функция $g(x)$:

$$g(x) = -2|x-1| + 2|x-4| + 3x - 5.$$

Далее, для упрощения анализа уравнения $f(x-a) = g(x+a)$ введём новую неизвестную $t = x + a$. Поскольку между $t$ и $x$ существует взаимно однозначное соответствие, исходную задачу можно переформулировать следующим образом.

Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$f(t-2a) = g(t) \qquad (10)$$

имеет бесконечно много решений.

Будем решать это уравнение графически. Начнём с того, что нарисуем графики функций $f(x)$ и $g(t)$. На рис. 1 график функции $y = g(t)$ изображён сплошной линией, а график функции $y = f(t)$ – прерывистой. Для дальнейшего будет важно, что соответствующие звенья этих ломаных параллельны.

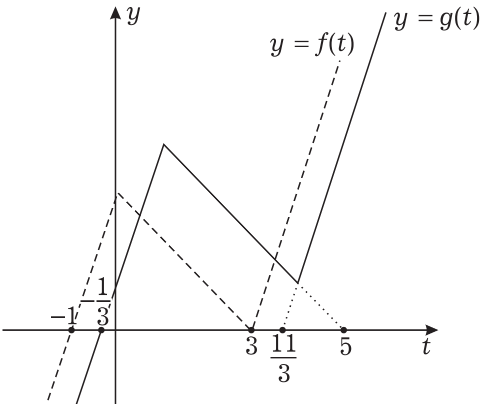



*Рис. 1*

Для $a=0$ уравнение (10) примет вид $f(t)=g(t)$. Из рис. 1 ясно, что оно имеет ровно два корня.

При увеличении $a$ от 0 до $+\infty$ график функции $y=f(t-2a)$ будет получаться из графика функции $y=f(t)$ параллельным переносом на $2a$ единиц вправо (вдоль оси абсцисс). Он пересечётся с графиком $y=g(t)$ в бесконечном числе точек, когда $2a=\frac{2}{3}$ (частично наложатся левые и правые звенья графиков), $2a=2$ (частично наложатся средние звенья графиков) и $2a=\frac{14}{3}$ (частично наложатся левое звено графика $y=f(t)$ и правое звено графика $y=g(t)$).

При уменьшении $a$ от 0 до $-\infty$ график функции $y=f(t-2a)$ будет получаться из графика функции $y=f(t)$ параллельным переносом на $-2a$ единиц влево (вдоль оси абсцисс). Он пересечётся с графиком $y=g(t)$ в бесконечном числе точек, когда $-2a=\frac{10}{3}$ (частично наложатся правое звено графика $y=f(t)$ и левое звено графика $y=g(t)$).

**Ответ.** $-\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{7}{3}$.

## 3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.** Доказать, что точка (1; 1) является центром симметрии графиков функций $f(x)=\frac{4}{2+2^x}$ и $g(x)=\frac{4}{2-2^x}$.

**Задача 5.** Доказать, что график функции $f(x)=\sqrt[5]{x+5}-6$ имеет центр симметрии.

**Задача 6.** Доказать, что график функции $f(x)=x^2+x+1$ не имеет центра симметрии.

**Задача 7.** (Ф-т почвоведения МГУ, 2004, июль, 7) Доказать, что график функции

$$f(x)=2x+\log_3\left(\frac{x^2+2x}{x^2+10x+24}\right)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты $(x_0, y_0)$ этого центра симметрии.

**Ответ.** ( $-1$; $-2$).

**Задача 8.** (Политехнический университет (СПб), физ.-мат. ф-т, 2005) Найдите центр симметрии графика функции

$$y=\log_3\left(3x-3+3\sqrt{x^2-2x+2}\right).$$

**Ответ.** (1; 1).

**Задача 9.** (Мехмат МГУ, устный экзамен, 2006) График функции $f(x)$ симметричен графику функции $g(x)=3|x|-3|x-2|-2x+4$ относительно точки (1; 4). Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $f(x+a)=g(x-a)$ имеет бесконечно много решений.

**Ответ.** $-2$; $-\frac{1}{2}$; 1; 4.

*Примечание.* За рамками статьи остались такие интересные факты:

1) наличие более одного центра симметрии определённым образом связано с периодичностью;

2) суперпозиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

**Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор**

В армии сержант: «Так, всем копать. Кто тут склонен к математике... Ты, Сидоров? Так бери лопату – будешь корни извлекать...».