Золотарёва Наталья Дмитриевна
Кандидат физико-математических наук.
Научный сотрудник лаборатории разностных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Алгебраический метод решения задач на построение

Задачи на построение возникли в связи с практическими потребностями человека. Древним землемерам и строителям приходилось решать простейшие задачи на построение, заключавшиеся в проведении прямых линий и построении прямых углов.

Геометрия (дословно «землемерие») как наука появилась во времена Фалеса (VII – VI вв. до н.э.). Считается, что именно он «привёз» геометрию из Египта и познакомил с ней греков. Это он вычислил высоту египетской пирамиды по отбрасываемой ею тени. Фалес был первым греческим учёным, который рассматривал задачи на построение не как чисто эмпирические задачи, а как задачи, требующие строгого математического доказательства.

Задачами на построение занимались также Пифагор, Платон, Евклид, Аполлоний и др. Причём построение считалось геометрическим только в том случае, если оно выполнялось при помощи циркуля и линейки, то есть путём проведения окружностей и прямых линий. При использовании других чертёжных инструментов построение геометрическим не считалось.

В «Началах» Евклида (III в. до н. э.) приводится множество задач на построение и задач, где существование фигур доказывается их построением при помощи циркуля и линейки.

Главное в задачах на построение – не фактическое построение с использованием циркуля и линейки, а в том, чтобы найти и описать последовательность действий (шагов построения), ведущих к построению нужной фигуры.

С помощью циркуля можно:

1) провести окружность с центром в любой точке плоскости радиусом, равным длине заданного отрезка;

2) найти точки пересечения проведённой окружности с любым заданным объектом плоскости (прямой, окружностью и т.п.).

С помощью линейки можно:

1) провести прямую через две заданные точки;

2) найти пересечение проведённой прямой с любым заданным объектом плоскости.

Общая схема решения задач на построение такова. Анализ: считаем, что искомая фигура построена, рисуем её, исследуем геометрические свойства, которые могут подсказать способ её построения. Построение: указывается последовательность действий, дающих искомую фигуру. Доказательство: приводится обоснование того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи (в большинстве случаев это следует из самого построения). Исследование: определяются условия, при которых существует решение задачи, анализируется число различных решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается или усложняется.

Элементарные построения

Приведём список элементарных построений, которые будут использоваться при решении задач. Техника таких построений с помощью только циркуля и линейки известна ещё с III в. до н. э. и описана в «Началах» Евклида.

1) Построение треугольника по трём сторонам.

2) Построение угла, равного данному.

3) Построение биссектрисы угла.

4) Деление отрезка пополам (построение серединного перпендикуляра к данному отрезку).

5) Построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

6) Построение прямой, параллельной данной прямой, через данную точку.

Теперь для того, чтобы решить задачу на построение циркулем и линейкой, достаточно свести её к элементарным построениям.

Алгебраический метод

У древних греков не было численной алгебры, поэтому они применяли геометрический способ записи многих алгебраических выражений. Например, уравнение $x^2 = ab$ на языке геометрии записывалось так: построить квадрат, равновеликий (то есть равный по площади) данному прямоугольнику со сторонами a и b.

Алгебраический метод решения задач на построение заключается в построении искомых элементов по формулам, выражающим их зависимость от заданных элементов.

Большинство задач этого вида решается с помощью комбинирования основных четырёх формул, приведённых ниже.

Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 1). Построим прямой угол и на его сторонах отложим катеты a и b. Соединим полученные точки A и B. По теореме Пифагора получим $x = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

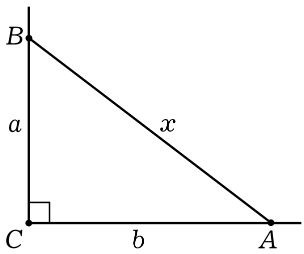

Рис. 1

Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$ (рис. 2). Построим прямой угол и на одной из его сторон отложим катет b. Из полученной точки C раствором циркуля, равным a, сделаем засечку на другой стороне угла. Второй катет построенного треугольника по теореме Пифагора равен $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

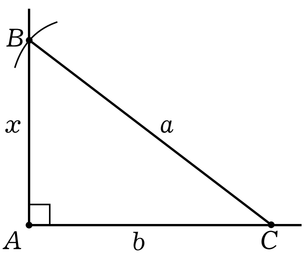

Рис. 2

Построение отрезка $x = \sqrt{ab}$ (рис. 3). Отложим на прямой отрезки $AK = a$, $KB = b$ (точки A и B находятся по разные стороны от точки K) и построим окружность на отрезке AB как на диаметре.

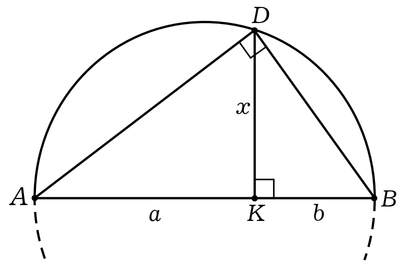

Рис. 3

Из точки K восставим перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D, угол ADB опирается на диаметр, он прямой. В прямоугольном треугольнике ADB отрезок DK будет высотой, проведённый из прямого угла к гипотенузе. Следовательно, $DK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{ab}$.

Построение отрезка $x = \dfrac{ab}{c}$ (рис. 4). На сторонах произвольного угла с вершиной O отложим отрезки $OA = c$, $AB = b$, $OC = a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, которая пересечёт другую сторону угла в точке D.

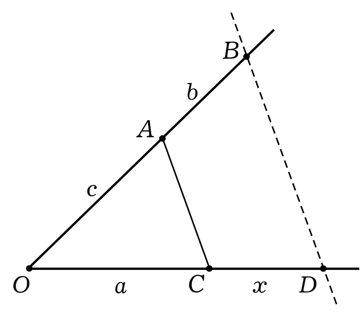

Рис. 4

По обобщённой теореме Фалеса получим $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{x}$, откуда $x = \dfrac{ab}{c}$.

Таким образом, мы расширили список допустимых построений. Теперь для того, чтобы решить задачу на построение, достаточно свести её к элементарным построениям и тем, которые сводятся к элементарным.

Задача 1. Даны отрезки a, b, c и число $n \in \mathbb{N}$. Построить отрезок x, где

а) $x = a \cdot \sqrt{n}$; б) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

в) $x = a \cdot \sqrt[4]{2}$; г) $x = \dfrac{a^{15}}{b^{14}}$; д) $x = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.

Решение. а) Сначала надо построить отрезок $b = n \cdot a$, потом $x = \sqrt{ab}$. В результате получим, что $x = a \cdot \sqrt{n}$.

б) Построим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза d равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Теперь построим прямоугольный треугольник с катетами d и c. Искомым отрезком будет гипотенуза этого треугольника.

в) Построим прямоугольный треугольник с катетами, равными a. Его гипотенуза b будет равна $\sqrt{2} \cdot a$. Теперь, построив отрезок $x = \sqrt{ab}$, получим, что $x = a \cdot \sqrt[4]{2}$.

г) По трём известным отрезкам a, b, c мы умеем строить отрезок $\dfrac{ac}{b}$, значит, мы умеем домножать отрезок на отношение известных отрезков. Домножив отрезок a на $\dfrac{a}{b}$, получим отрезок длины $\dfrac{a^2}{b}$. Домножив полученный отрезок на $\dfrac{a}{b}$, получим отрезок длины $\dfrac{a^3}{b^2}$. Проделав эту процедуру 14 раз, получим искомый отрезок.

Замечание. При решении этой задачи, так же как и остальных задач на построение, не надо проводить все построения, достаточно описать схему.

д) Разложим числитель дроби на множители

$$x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2}$$

и будем последовательно строить отрезки:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \sqrt{ab},$$

$$e = \sqrt{c^2 - d^2}, \quad f = \frac{(a + b)e}{c}.$$

Искомый отрезок $x = \dfrac{fe}{c}$ (заметим, что $c^2 - d^2 \geq 0$. Действительно, $c^2 - d^2 = a^2 - ab + b^2 = (a^2 - b^2) + 3ab \geq 0$, так как $a > 0$, $b > 0$).

Окружность Аполлония

Геометрическим местом точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m : n \neq 1$, является окружность, называемая *окружностью Аполлония*.

Построим эту окружность (и тем самым докажем её существование) с помощью алгебраического метода. Построение будем проводить на координатной плоскости. Обозначим длину отрезка AB через a, отношение $m : n$ через k ($|k| \neq 1$). Примем точку A за начало координат и прямую AB за ось x.

Точка M с координатами (x, y) принадлежит искомому ГМТ

$$\frac{AM}{MB} = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} = k^2.$$

Домножим равенство на знаменатель и сгруппируем слагаемые по степеням x. Поделив полученное уравнение на коэффициент перед x^2, получим

$$x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{\left(k^2 - 1\right)^2}.$$

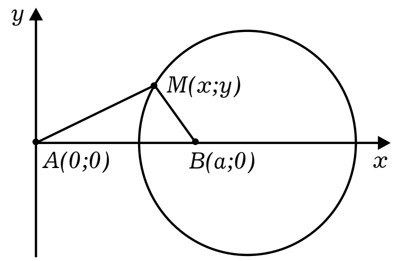

Рис. 5

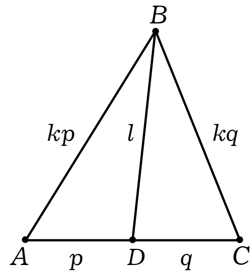

Рис. 6

Мы получили уравнение окружности радиуса $ak / |k^2 - 1|$ с центром на прямой AB на расстоянии $ak^2 / |k^2 - 1|$ от точки A справа, если $k > 1$, и слева, если $k < 1$. Рисунок 5 соответствует $k = 2$.

Задача 2. Построить треугольник ABC, если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC, на которые она делит противоположную сторону.

Решение. *Первый способ*. Пусть биссектриса BD равна l, отрезки $AD = p$, $DC = q$ (рис. 6). Тогда по свойству биссектрисы боковые стороны $AB = kp$, $BC = kq$.

По формуле для длины биссектрисы

$$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$$

получим

$$l^2 = k^2pq - pq \Leftrightarrow \frac{l^2}{p} = k^2q - q.$$

Отрезок длины $\frac{l^2}{p}$ мы можем построить, следовательно, можем построить и

$$k^2q = \frac{l^2}{p} + q.$$

Теперь построим боковую сторону $kq = \sqrt{k^2q \cdot q}$. Аналогично строим сторону kp. Осталось построить треугольник по трём сторонам.

Второй способ. Теперь приведём решение этой задачи с помощью окружности Аполлония. Построим на отрезке AC окружность Аполлония. Она состоит из точек, расстояния от которых до двух данных точек A и C находятся в заданном отношении $p : q$. Следовательно, вершина B лежит на этой окружности. С другой стороны, точка B удалена от точки D на расстояние l. Значит, точку B можно построить как точку пересечения окружности Аполлония с окружностью с центром в D радиуса l.

Тригонометрия в задачах на построение

Пусть даны отрезок длины a и острый угол, равный α. Покажем, как построить отрезки длины

$$a\cos\alpha, \quad a\sin\alpha, \quad \frac{a}{\cos\alpha},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}, \ a \cdot \operatorname{tg}\alpha, \ a \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Для построения будем использовать соотношения в прямоугольном треугольнике.

1) Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе a и острому углу, равному α. Его катеты будут равны $a\cos\alpha$ и $a\sin\alpha$.

2) Построим прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему углу, равному α. Тогда его гипотенуза будет равна $a / \cos\alpha$, а второй катет $a \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

3) Построим прямоугольный треугольник по катету a и противолежащему углу α. Тогда его гипотенуза будет равна $\dfrac{a}{\sin\alpha}$, а второй катет $a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Задача 3. Построить угол, равный трём градусам.

Решение. Сначала построим угол 15°.Для этого построим равносторонний треугольник и дважды поделим один из его углов пополам (рис. 7).

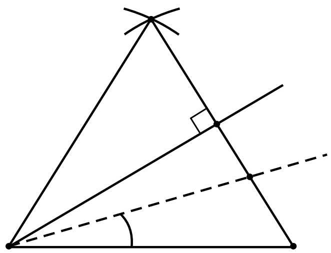

Рис. 7

Если мы построим угол 18°, отняв от него угол 15°, получим искомый угол 3°.

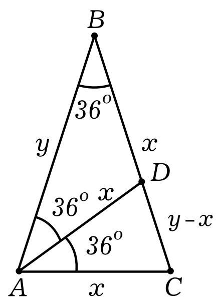

Рис. 8

Для вычисления $\sin 18^\circ$ можно воспользоваться тождеством $\sin(2 \cdot 18^\circ) = \cos(3 \cdot 18^\circ)$ и свести по формулам тригонометрии к квадратному уравнению относительно $\sin 18^\circ$, а можно рассмотреть замечательный равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ с углом 36° при вершине B (рис. 8). Биссектриса AD разбивает этот треугольник на два равнобедренных треугольника CAD и ADB, при этом $\angle CAD = 36^\circ$ и $AC = AD = DB$. Пусть $AC = x$ и $AB = y$, тогда $CD = y - x$. Из ΔABC следует $AC = x = 2 \cdot y \cdot \sin 18^\circ$, а из ΔCAD следует $DC = y - x = 2 \cdot x \cdot \sin 18^\circ$. Исключая y, легко приходим к квадратному уравнению

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0,$$

откуда, с учётом положительности $\sin 18^\circ$, находим $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Построим угол с таким синусом. Возьмём произвольный отрезок длины a и построим отрезок длины $c = \left(\sqrt{5} + 1\right)a$. Потом построим прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетом a. Синус угла против катета a будет равен $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Отняв от него угол 15°, получим искомый угол 3°.

Замечание. Теперь, имея угол 3°, мы сможем построить любой кратный ему угол.

Смешанные задачи

Задача 4. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Через вершину A с помощью циркуля и линейки провести такую прямую, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой равнялась $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть нужная прямая уже построена, а C', B', H' – проекции на неё точек C, B и H, где H – основание высоты AH. В прямоугольной трапеции $C'CBB'$ отрезок HH' будет средней линией и, следовательно,

$$HH' = \left(CC' + BB'\right)/2 = \sqrt{2}/2.$$

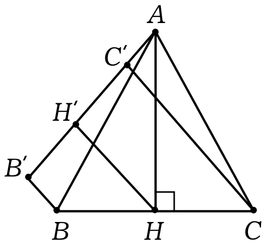

Рис. 9

На AH как на диаметре строим окружность. С центром в точке H проводим окружность радиусом $\sqrt{2}/2$. В пересечении двух окружностей получим две искомые точки H'.

Задача 5. Дан треугольник. Построить равносторонний треугольник, равновеликий данному (то есть такой же площади).

Решение. Пусть a – основание данного треугольника, а h – проведённая к нему высота. Построим отрезок x такой, что площадь равностороннего треугольника со стороной x равна площади исходного треугольника. Для того чтобы выразить x через a и h, приравняем выражения для площадей двух треугольников:

$$\frac{1}{2}\cdot ah = \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot \sin 60^\circ \iff x = \sqrt{a\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ}}.$$

Таким образом, сначала надо построить отрезок $b = h/\sin 60^\circ$, а потом отрезок $x = \sqrt{ab}$. Треугольник со сторонами длины x и будет искомым треугольником.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны отрезки a, b, c, d и 1. С помощью циркуля и линейки построить x:

а) $x = \dfrac{a+1}{a+2}$; б) $x = \sqrt[4]{abcd}$;

в) $x = \dfrac{a^2-9}{a^2+a-2}$; г) $x = \sqrt{\dfrac{abc^2+d^4}{b^2+cd}}$;

д) $x = \sqrt[4]{a^4+b^4}$.

2. Дан отрезок длины 7. Построить отрезок длины $\sqrt{7}$.

3. Дан угол 19°, построить угол в 1°.

4. Дан отрезок длины a и угол, равный α. Построить отрезки длины $a\sqrt{\sin\alpha}$ и $a/\sqrt{\cos\alpha}$.

5. С помощью циркуля и линейки разделить угол 54° на три равные части.

6. Построить золотое сечение отрезка AB, то есть на отрезке AB найти точку E такую, что $AB : AE = AE : BE$.

7. Провести прямую, параллельную основаниям данной трапеции так, чтобы площадь трапеции разделилась пополам.

Литература

1) *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение с решениями. Под редакцией Н.В. Наумович. – М.: Учпедгиз, 1950. – 177 с.

2) *Золотарёва Н. Д.* Задачи на построение с решениями. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 106 с.

3) *Федотов М.В., Хайлов Е.Н.* Задачи устного экзамена по математике. – М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

4) Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова с ответами и решениями (1999 – 2004 гг.) Сост. Е. А. Григорьев. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.