Дроздов Виктор Борисович
Преподаватель физики
Медицинского университета г. Рязани.
Награждён Почётной грамотой Министерства
просвещения СССР 1979 г.

«Алгебра площадей»

В статье предлагается метод решения сложной и интересной геометрической задачи. Статья полезна для учащихся, интересующихся математикой, а также для учителей.

1. Встреча с задачей

В известных тренировочных вариантах Александра Ларина (математика, ГИА – ЕГЭ, 2016 год) внимание автора привлекла следующая

Задача 1. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного отрезками AN, BP и CM, к площади треугольника ABC (рис. 1).

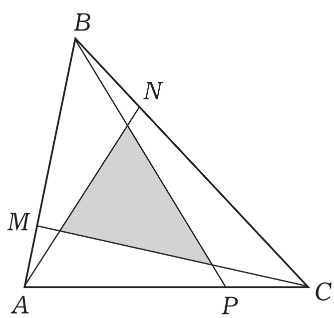

Рис. 1

Задача для выпускников, и тем более для девятиклассников, весьма трудная. Подумаем о пути решения.

Рассуждаем так. Поскольку определить углы треугольника ABC невозможно, то искомое отношение площадей от этих углов не зависит. Поэтому в сравнении площадей треугольников будем постоянно использовать простое утверждение, сразу следующее из основной формулы площади треугольника.

Теорема. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой противоположной стороны, делит его площадь в том же отношений, в котором точка делит сторону.

При этом каждый раз ссылаться на это не будем, ибо и так понятно. Площадь треугольника ABC обозначим S. Площади остальных треугольников на рис. 2 проставлены внутри соответствующих треугольников.

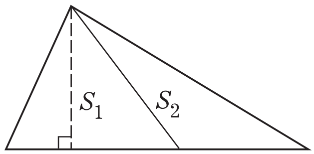

Рис. 2

Следующий шаг – «ход конём». Решим известную стандартную задачу, предлагаемую на различных экзаменах с конкретными числовыми данными [1], но решим её в общем виде.

2. Конкурсная задача

Задача 2. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE : EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD : DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырёхугольника к площади данного треугольника.

Решение. См. рисунок 3. В четырёхугольнике $AEOD$ проведена диагональ AO, в результате чего он разбивается на два треугольника: S_1 и S_2.

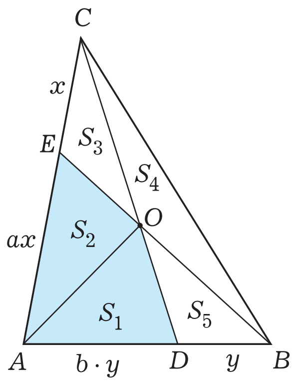

Рис. 3

По теореме из $AD = b \cdot DB$ следует

$$S_1 = bS_5 \text{ и } S_1 + S_2 + S_3 = b(S_4 + S_5).$$

Из $AE = a \cdot CE$ следует

$$S_2 = aS_3 \text{ и } S_1 + S_2 + S_5 = a(S_3 + S_4).$$

В результате имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 = b(S_4 + S_5), \\ S_1 + S_2 + S_5 = a(S_3 + S_4), \\ S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S, \\ S_1 = bS_5, \\ S_2 = aS_3. \end{cases}$$

После естественного исключения неизвестных S_1 и S_2 получим:

$$S_3 = \frac{bS_4}{a+1}, \quad S_5 = \frac{aS_4}{b+1}, \quad S_4 = \frac{S}{a+b+1}.$$

Дальнейшее ясно:

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}. \quad (1)$$

3. Решение задачи в общей постановке[1]

Задача 3. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM : MB = m$, $BN : NC = n$, $CP : PA = p$. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного отрезками AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.

Решение. См рисунок 4. Как видим, искомая площадь

$$S_0 = S - S_{APB_1M} - S_{CPA_1N} - S_{MC_1NB}.$$

Формула (1) даёт нам три отношения:

Площадь четырёхугольника APB_1M к площади треугольника ABC:

[1] Другое решение можно найти в [2].

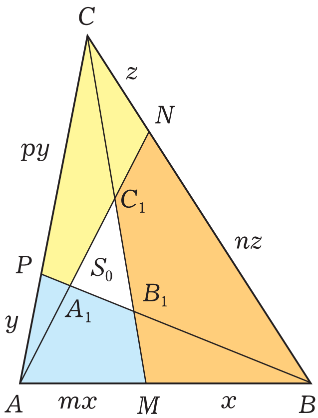

Рис. 4

$$\frac{m(1+mp+2p)}{(p+1)(m+1)(1+mp+p)}. \qquad (2)$$

Площадь четырёхугольника CPA_1N к площади треугольника ABC:

$$\frac{p(1+np+2n)}{(n+1)(p+1)(1+np+n)}. \qquad (3)$$

Площадь четырёхугольника MC_1NB к площади треугольника ABC:

$$\frac{n(1+mn+2m)}{(m+1)(n+1)(1+mn+m)}. \qquad (4)$$

Следовательно,

$$\frac{S_0}{S}=1-\frac{m(1+mp+2p)}{(p+1)(m+1)(1+mp+p)}-$$

$$-\frac{p(1+np+2n)}{(n+1)(p+1)(1+np+n)}-$$

$$-\frac{n(1+mn+2m)}{(m+1)(n+1)(1+mn+m)}.$$

Отнимем от единицы первую дробь, затем от результата вторую, затем от нового результата третью. При этом будут приводиться и уничтожаться подобные члены, что упрощает выкладки, хотя и довольно громоздкие, но стандартные.

Результат таков:

$$\frac{S_0}{S}=\frac{(mnp-1)^2}{(1+m+mn)(1+n+np)(1+p+pm)}.$$

Структура этой формулы понятна: она симметрична, то есть не меняется при круговой перестановке букв m, n, p.

Заметим, что при $m=n=p$ три дроби (2), (3) и (4) совпадают, поэтому отношение

$$\frac{S_0}{S}=\left(1-3\frac{m(1+m^2+2m)}{(m+1)^2(1+m^2+m)}\right)=$$

$$=\left(1-3\frac{m}{1+m+m^2}\right).$$

Для задачи 1 при $m=4$ получаем

$$\frac{S_0}{S}=\frac{3}{2}.$$

Предложенный алгоритм решения при конкретных и равных m, n и p достаточно прост и ясен.

Литература

1. *Лужина Л.М., Натяганов В.Л.* Сборник задач по геометрии и тригонометрии. – М.: УНЦДО, 2003. Глава IV.

2. *Ткачук В.В.* Математика абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2005. Глава 7. Задача 4.