

Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Активно используем графики элементарных функций. Часть I

В школе все «проходят» построение графиков прямых $y = kx + b$ и квадратных корней $y = \sqrt{ax + b}$. Но на практике эти графики используются очень редко, а потому навыки работы с ними у школьников теряются. В статье мы найдём применение этим графикам.

Рассмотренные задачи предлагались или в тренировочных вариантах ЕГЭ, или на ЕГЭ, или на дополнительном вступительном испытании в МГУ (ДВИ МГУ) в последние годы. Задачи попали автору случайно. Наверняка они взяты из Интернета.

Однако ещё раз показать, как такие задачи можно решать с помощью эскизов графиков входящих в уравнения и неравенства функций, будет не лишним. Эта методика, если и не упрощает, то намного проясняет даже обычному школьнику (учащемуся не профильного класса) картину условий задач и их решений.

В статье используются графики только прямых $y = ax + b$ и полупарабол $y = \sqrt{ax + b}$, поэтому решения задач могут изучать школьники 9–11 классов. В первой части статьи мы рассмотрим неравенства вида

$$\sqrt{\sqrt{ax + b} - (cx + d)} \leq \alpha^2, \log_{\alpha}(\sqrt{ax + b} - (cx + d)) \leq \beta.$$

Как мы решаем неравенства $\sqrt{\sqrt{ax + b} - (cx + d)} \leq \alpha^2$? Во-первых, находим ОДЗ – решаем иррациональное неравенство $\sqrt{ax + b} - (cx + d) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{ax + b} \geq cx + d$.

Как известно, для его решения придётся рассмотреть два случая: $cx + d < 0$ и $cx + d \geq 0$. Заметим сразу, что школьники, особенно из обычных классов, нередко об этом забывают и

сразу возводят в квадрат обе части неравенства.

Во-вторых, на ОДЗ решаем ещё одно иррациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{ax+b}-(cx+d)} &\leq \alpha^2 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \\ \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \sqrt{ax+b}-(cx+d) &\leq \alpha^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{ax+b} &\leq \alpha^4+(cx+d) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} cx+\alpha^4+d \geq 0, \\ ax+b \leq (cx+\alpha^4+d)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Находим пересечение решений двух пунктов и получаем ответ.

Но мы не будем решать иррациональные неравенства, мы будем решать только иррациональные уравнения вида $\sqrt{ax+b}=cx+f$.

Что касается примеров вида $\log_{\alpha}(\sqrt{ax+b}-(cx+d)) \leq \beta$, то они адресованы тем, кто уже изучил или изучает логарифм и его свойства.

Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x} \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Запишем равносильную нашему неравенству систему, включающую ОДЗ:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}+\sqrt{2-x} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{2-x} \geq 0, \\ x-1+\sqrt{2-x} \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-x \leq \sqrt{2-x} \leq \frac{5}{4}-x. \end{aligned}$$

Теперь прикинем эскиз графика функции $y=\sqrt{2-x}$: отмечаем точку, в которой подкоренное выражение обращается в нуль, и ещё какую-нибудь точку, в которой функция определена (проще всего взять $x=0$, а если в ней функция не определена, как, например, $y=\sqrt{x-2}$, то удобно взять такое значение, чтобы корень извлекался: $y(6)=\sqrt{6-2}=2$). Для

нашей функции $y(2)=0$, $y(0)=\sqrt{2}$, см. рис. 1.

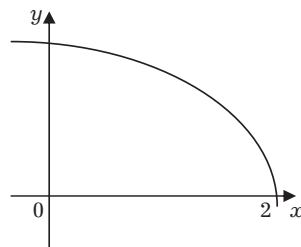


Рис. 1

Затем чертим прямую $y_1=1-x$. Для неё $y_1(0)=1$, поэтому прямая пересекает ось Oy ниже полупараболы, значит, пересечение прямой и полупараболы существует и оно единственно, см. рис. 2.

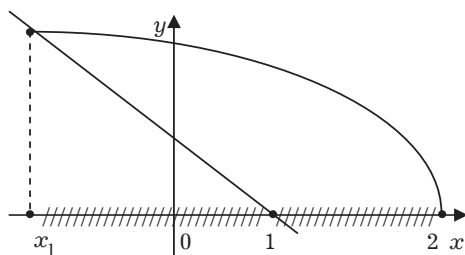


Рис. 2

Найдём абсциссу x_1 точки пересечения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} &= 1-x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 2-x = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Из рис. 2 очевидно, что

$$\sqrt{2-x} \geq 1-x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 2 \right].$$

Теперь чертим прямую $y_2 = 1,25 - x$, $y_2(0) = 1,25 < \sqrt{2}$. Пересечение с полупараболой также существует, и оно единственно, см. рис. 3.

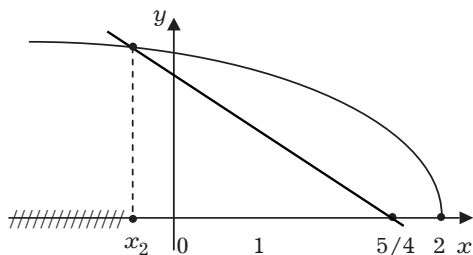


Рис. 3

Найдём абсциссу x_2 точки пересечения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} = \frac{5}{4} - x &\Leftrightarrow 4\sqrt{2-x} = 5 - 4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x \geq 0, \\ 32 - 16x = 16x^2 - 40x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x \geq 0, \\ 16x^2 - 24x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4x \geq 0, \\ x = \frac{12 \pm 16}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Из рис. 3 очевидно, что

$$\sqrt{2-x} \leq \frac{5}{4} - x \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right].$$

Отметим общую часть рисунков 2 и 3 – рис. 4.

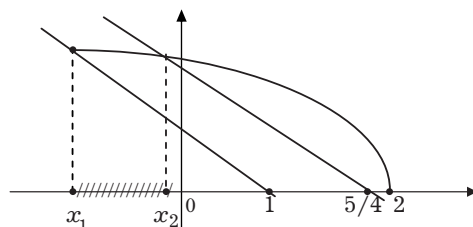


Рис. 4

Из рис. 4 сразу видно, что

$$1 - x \leq \sqrt{2-x} \leq \frac{5}{4} - x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{4}\right].$$

Ответ. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x-2}-x+4} \leq \sqrt{2}$.

Решение. Запишем сразу, что $\sqrt{\sqrt{x-2}-x+4} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x-4 \leq \sqrt{x-2} \leq x-2$.

Данное неравенство можно, построив элементарные графики, решить устно.

Построим график функции $y = \sqrt{x-2}$, см. рис. 5.

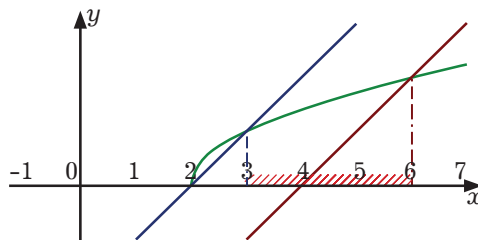


Рис. 5

Затем строим график функции $y_1 = x - 4$, пересечение с полупараболой одно. Для нахождения абсциссы точки пересечения решаем уравнение $\sqrt{x-2} = x - 4$. Его решение легко угадывается – это $x_1 = 6$, и мы имеем решение первого неравенства: $\sqrt{x-2} \geq x - 4 \Leftrightarrow x \in [2; 6]$.

Теперь строим график функции $y_2 = x - 2$. Видно, что точек пересечения две – это решения уравнения $\sqrt{x-2} = x - 2$. Они тоже очевидны: $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Из рис. 5 видно, что $\sqrt{x-2} \leq x - 2 \Leftrightarrow x \in \{2\} \cup [3; +\infty)$. Из рисунка находится и решение задачи:

$$\sqrt{\sqrt{x-2}-x+4} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{2\} \cup [3; 6].$$

Ответ. $\{2\} \cup [3; 6]$.

Пример 3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{25}}(\sqrt{5-x}+2x-4) \geq -\frac{1}{2}.$$

Решение. Неравенство такого вида предлагалось на ДВИ МГУ. Оно замечательно тем, что на таком простом неравенстве легко проверяются основные навыки абитуриента в решении логарифмических и иррациональных неравенств одновременно.

Прежде всего надо вспомнить, как упростить логарифмическое неравенство. Можно поступить, например, так:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{25}}(\sqrt{5-x}+2x-4) &\geq \\ &\geq -\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{25}}\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{25}} 5. \end{aligned}$$

Затем надо поменять знак при переходе к неравенству для подлогарифмических выражений:

$$\sqrt{5-x}+2x-4 \leq 5$$

и не забыть про ОДЗ:

$$\sqrt{5-x}+2x-4 > 0.$$

Можно поступить и по-другому – перейти к основанию, большему 1, и тогда не надо думать о смене знака:

$$\log_{\frac{1}{25}}(\sqrt{5-x}+2x-4) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\log_5(\sqrt{5-x}+2x-4)}{2} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(\sqrt{5-x}+2x-4) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{5-x}+2x-4 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x+4 < \sqrt{5-x} \leq -2x+9.$$

Теперь решаем графически два иррациональных неравенства.

Строим полупараболу $y = \sqrt{5-x}$, для которой $y(0) = \sqrt{5}$, а также прямые $y_1 = -2x+4$ (для неё $y_1(2) = 0$, $y_1(0) = 4 > \sqrt{5}$, поэтому пересечение с полупараболой на положительной полуоси) и $y_2 = -2x+9$ (для неё

$y_2(4,5) = 0$, $y_2(0) = 9 > \sqrt{5}$, поэтому пересечение с полупараболой на положительной полуоси), см. рис. 6.

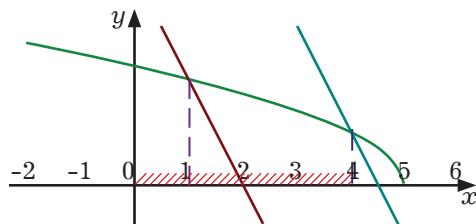


Рис. 6

Находим (устно) абсциссы точек пересечения прямых и полупараболы:

$$\sqrt{5-x} = -2x+4 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$\sqrt{5-x} = -2x+9 \Leftrightarrow x = 4.$$

Отмечаем их на оси и по рис. 6 находим, что

$$-2x+4 < \sqrt{5-x} \leq -2x+9 \Leftrightarrow x \in (1; 4].$$

Ответ. $(1; 4]$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{x+6}-\frac{x}{4}\right) \geq -1.$$

Решение. Заметим, что

$$\log_{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{x+6}-\frac{x}{4}\right) \geq -1 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x+6}-\frac{x}{4} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} < \sqrt{x+6} \leq \frac{x}{4} + \frac{5}{2}.$$

Строим полупараболу $y = \sqrt{x+6}$, для которой $y(0) = \sqrt{6}$, прямую $y_1 = \frac{x}{4}$ (для неё $y_1(0) = 0 < \sqrt{6}$, $y_1(4) = 1$ и пересечение с полупараболой видно на рис. 7), прямую $y_2 = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$, для которой $y_2(-10) = 0$, $y_2(0) = 2,5 > \sqrt{6}$.

Проведя прямую $y_2 = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$, сразу мы не поймём, есть ли вообще пересечение, существует ли две точки пересечения или одна. Поэтому акку-

ратно находим абсциссы точек пересечения прямых и полупараболы:

$$\frac{x}{4} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 16x + 96 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8 + 4\sqrt{10};$$

$$\sqrt{x+6} = \frac{x}{4} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{5}{2} \geq 0, \\ 16x + 96 = x^2 + 20x + 100 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Оказалось, что второе уравнение имеет единственное решение. Что это значит? Это значит, что прямая

$y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ является касательной к па-

раболе $x+6=y^2$, или, что то же, к нашей полупараболе $y = \sqrt{x+6}$, см. рис. 7.

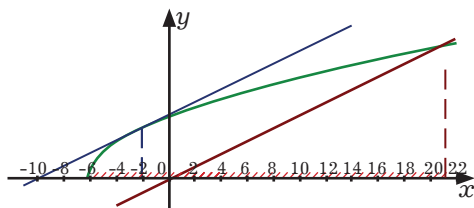


Рис. 7

На рис. 7 видно решение:

$$\log_{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{x+6} - \frac{x}{4} \right) \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-6; 8 + 4\sqrt{10}).$$

Ответ. $[-6; 8 + 4\sqrt{10}).$

Примечание. Все разобранные задачи решаются и стандартными методами.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x-2}-x+5} \leq 2.$$

Ответ. $\left[3; \frac{11+\sqrt{13}}{2} \right].$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{5-x}-1-x} \leq \sqrt{6}.$$

Ответ. $[-4; 1].$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,01} (\sqrt{9-x} + x + 3) \geq -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $(-7; 5].$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{4-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) \geq -1.$$

Ответ. $(-2\sqrt{3}; 4].$

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Единственный путь, ведущий к знанию, – это деятельность.

Б. Шоу

Что значит знать?

Вот, друг мой, в чём вопрос.

И.В. Гёте