Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Активно используем графики элементарных функций. Часть II

Продолжаем статью, начатую в предыдущем номере журнала.

В школе все «проходят» построение графиков прямых $y = kx + b$ и квадратных корней $y = \sqrt{ax + b}$. Но на практике они используются очень редко, а потому навыки работы с ними у школьников теряются. В настоящей статье мы найдём им применение.

В статье приведены решения задач, которые были или в тренировочных вариантах ЕГЭ, или на ЕГЭ, или на дополнительном вступительном испытании в МГУ (ДВИ МГУ) в последние годы. Задачи попали автору случайно. Наверняка они взяты из Интернета.

Однако ещё раз показать, *как* такие задачи можно решать с помощью эскизов графиков входящих в уравнения и неравенства функций, будет не лишним. Эта методика, если и не упрощает, то намного проясняет даже обычному школьнику (учащемуся не профильного класса) картину условий задач и их решений.

В статье используются графики только прямых $y = ax + b$ и полупарабол $y = \sqrt{ax + b}$. Поэтому решения задач могут изучать школьники 9–11 классов.

Особенностью второй части статьи является то, что некоторые решения оформлены с помощью равносильных преобразований практически без слов. Все задачи решены несколькими способами. Это, во-первых, даёт возможность школьнику выбрать наиболее подходящий именно ему способ решения (в Интернете или других источниках могут быть и другие решения). Во-вторых, это даст возможность экспертам ЕГЭ эффективней оценивать представляемые учащимися различные способы решения.

Во второй части статьи мы рассмотрим задачи с параметром.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2-5x}\ln\left(36x^2-a^2\right)= \\ =\sqrt{2-5x}\ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень.

Решение. *Первый способ* (алгебраический). Запишем решение так, как могут это сделать учащиеся профильных классов, здесь нет необходимости что-то объяснять:

$$\sqrt{2-5x}\ln\left(36x^2-a^2\right)=$$
$$=\sqrt{2-5x}\ln(6x+a)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2-5x}\left(\ln(6x-a)+\ln(6x+a)-\right.$$
$$\left.-\ln(6x+a)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2-5x\ge 0,\\ 6x+a>0,\\ 6x-a>0,\\ \left[\begin{array}{l}2-5x=0,\\ 6x-a=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{5},\\ 6\cdot\dfrac{2}{5}+a>0,\\ 6\cdot\dfrac{2}{5}-a>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{a+1}{6},\\ 2-5\cdot\dfrac{a+1}{6}\ge 0,\\ 6\cdot\dfrac{a+1}{6}+a>0,\\ 6\cdot\dfrac{a+1}{6}-a>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5},\ a\in\left(-\dfrac{12}{5};\dfrac{12}{5}\right);\\ x=\dfrac{a+1}{6},\ a\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{5}\right].\end{array}\right.$$

Теперь выясним, при каких значениях параметра a корни совпадают:

$$x=\frac{a+1}{6}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow a=\frac{7}{5}.$$

Так как при $a=\dfrac{7}{5}$ корни совпадают, не будем его учитывать как корень уравнения $6x-a=1$. Нанесём на ось a промежутки, в которых существуют корни, см. рис. 1.

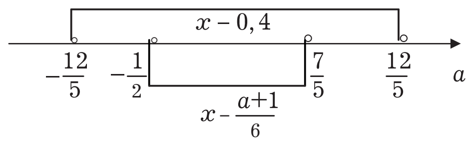

Рис. 1

Видно, что единственный корень существует, если

$$a\in\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{5};\frac{12}{5}\right).$$

Ответ. $\left(-\dfrac{12}{5};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{5};\dfrac{12}{5}\right)$.

Второй способ (с применением графиков). Рассмотрим решение уравнения

$$\sqrt{2-5x}\ln\left(36x^2-a^2\right)=\sqrt{2-5x}\ln(6x+a)$$

в плоскости $(x;a)$.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases}2-5x\ge 0,\\ 6x+a>0,\\ 6x-a>0.\end{cases}$

Рисуем сплошной линией прямую $x=\dfrac{2}{5}$, причём чертим её подальше от оси Ox, чтобы чертёж был понятней, см. рис. 2. Затем рисуем пунктиром прямую $a=6x$ до пересечения с прямой $x=\dfrac{2}{5}$ и отмечаем ординату точки пересечения. Выясняем, что $6x-a>0$ выполнено под прямой, поэтому, чтобы не запутаться, заштрихуем *ненужную* часть *над* прямой.

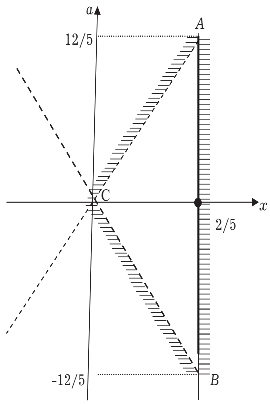

Рис. 2

Затем аналогично строим прямую $a=-6x$ (*ненужную* часть под прямой заштриховываем). Заметим, что мы не соблюдаем масштаб, важно отметить точки пересечения! В роли ОДЗ получился треугольник ABC, см. рис. 2.

Решаем уравнение:

$$\sqrt{2-5x}\ln\left(36x^2-a^2\right)=$$
$$=\sqrt{2-5x}\ln(6x+a)\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{2-5x}\left(\ln(6x-a)+\ln(6x+a)-\right.$$
$$\left.-\ln(6x+a)\right)=0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5},\\ x=\dfrac{a+1}{6}.\end{array}\right.$$

Теперь наносим решения $x=\dfrac{2}{5}$. Если это делается на ЕГЭ, то жирной линией, а мы сделаем отрезок красным, но на концах нарисуем стрелки, так как концы попадают на пунктирную границу. Затем чертим прямую $6x-a=1\Leftrightarrow a=6x-1$ (она параллельна прямой $a=6x$). Находим ординаты точек пересечения с границей – вычислять приходится только одну (остальные считаются устно):

$$\begin{cases} a=-6x,\\ a=6x-1\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

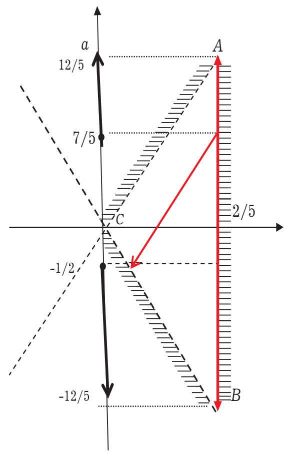

Рис. 3

Ответ виден на рис. 3.

Ответ. $\left(-\dfrac{12}{5};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{5};\dfrac{12}{5}\right)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\ln(3x+a)=\sqrt{5x-3}\ln(4x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение. *Первый способ* (алгебраический).

$$\sqrt{5x-3}\ln(3x+a)=\sqrt{5x-3}\ln(4x-a)\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{5x-3}\left(\ln(3x+a)-\ln(4x-a)\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x-3=0,\\ 3x+a=4x-a\Leftrightarrow x=2a,\end{array}\right.\\ 5x-3\ge 0,\\ 3x+a>0,\\ 4x-a>0,\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{3}{5},\\ 3\cdot\dfrac{3}{5}+a>0,\\ 4\cdot\dfrac{3}{5}-a>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2a,\\ 5\cdot 2a-3\geq 0,\\ 3\cdot 2a+a>0,\\ 4\cdot 2a-a>0,\\ 0\leq 2a\leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{5},\ a\in\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{12}{5}\right);\\ x=2a,\ a\in\left[\dfrac{3}{10};\dfrac{1}{2}\right].\end{array}\right.$$

Проверим, при каких a корни совпадают: $x=\dfrac{3}{5}=2a\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{10}$.

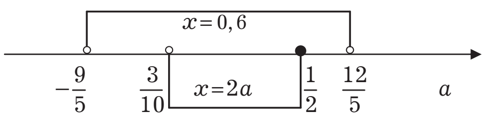

Рис. 4

На рис. 4 видно, что ровно один корень на отрезке [0; 1] будет только при $a\in\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{10}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{12}{5}\right)$.

Ответ. $\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{3}{10}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{12}{5}\right)$.

Второй способ (с применением графиков). Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases}5x-3\geq 0,\\ 3x+a>0,\\ 4x-a>0,\\ 0\leq x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{5}\leq x\leq 1,\\ 3x+a>0,\\ 4x-a>0.\end{cases}$$

Чертим вертикали $x=\dfrac{3}{5}$ и $x=1$ сплошными линиями. Затем проводим прямые $a=-3x$ и $a=4x$. В роли ОДЗ получилась трапеция $ABCD$, см. рис. 5.

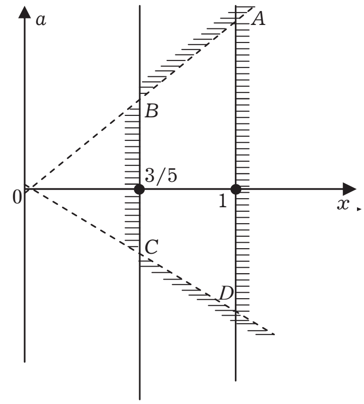

Рис. 5

Решим уравнение:

$$\sqrt{5x-3}\ln(3x+a)=\sqrt{5x-3}\ln(4x-a)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{5x-3}\left(\ln(3x+a)-\ln(4x-a)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}5x-3=0,\\ 3x+a=4x-a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{5},\\ x=2a.\end{array}\right.$$

Одна из сторон трапеции является решением – отмечаем это решение красным цветом, см. рис. 6 (на ЕГЭ выделим решение жирным). Проводим прямую $x=2a$. Теперь видно, когда решение единственно:

$$a\in\left(-\frac{9}{5};\frac{3}{10}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{12}{5}\right).$$

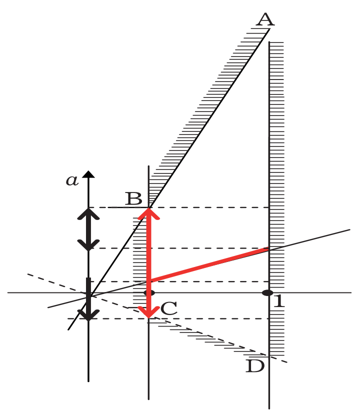

Рис. 6

Ответ. $\left(-\frac{9}{5};\frac{3}{10}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{12}{5}\right)$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\ln(2x+2a-5)=$$
$$=\ln(3a-x)\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$.

Решение. *Первый способ* (с применением графиков). Рассмотрим решение в плоскости $(x;a)$. Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases}3a-x>0,\\ 2x+2a-5>0,\\ x-a>0,\\ 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Строим граничные прямые $x=0, x=2$. Затем остальные прямые:

1) $x-3a=0$;

2) $x-a=0$;

3) $2x+2a-5=0$,

см. рис. 7. Видно, что прямые как-то пересекаются, найдём соответствующие точки пересечения. Получился четырёхугольник $ABCD$.

$$C:\begin{cases}-x+3a=0,\\ 2x+2a-5=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{8},\quad x=\frac{15}{8}.$$

$$D:\begin{cases}x-a=0,\\ 2x+2a-5=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{4},\quad x=\frac{5}{4}.$$

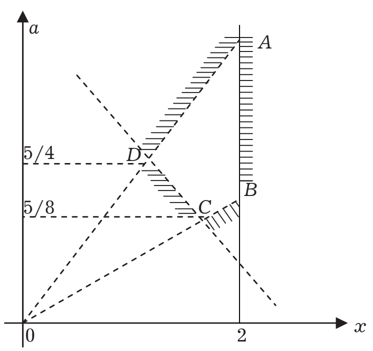

Рис. 7

Решаем уравнение:

$$\ln(3a-x)\ln(2x+2a-5)=$$
$$=\ln(3a-x)\ln(x-a)\Leftrightarrow$$
$$\ln(3a-x)\big(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\big)=0$$
$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}3a-x=1,\\ 2x+2a-5=x-a\Leftrightarrow x+3a-5=0.\end{array}\right.$$

Наносим на четырёхугольник прямые – решения: $3a-x=1$ и $x+3a-5=0$. Находим точки пересечения этих прямых с граничными:

1) $\begin{cases}x+3a-5=0,\\ 3a-x=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1, x=2$

– пересечение на граничной вертикали.

2) $1\cap 3:\begin{cases}x+3a-5=0,\\ x-a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{4},\ x=\frac{5}{4}$

– пересечение в точке пересечения граничных прямых.

3) $4\cap 1:\begin{cases}2x+2a-5=0,\\ 3a-x=1\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{7}{8},\ x=\frac{13}{8}.$

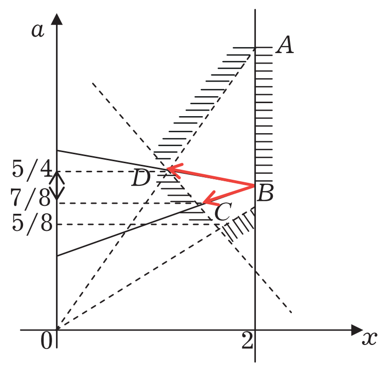

Рис. 8

Из рис. 8 видно, что решение всегда одно и оно имеет место при $a\in\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$.

Второй способ (алгебраический).

$$\ln(3a-x)\ln(2x+2a-5)=$$
$$=\ln(3a-x)\ln(x-a)\Leftrightarrow$$
$$\ln(3a-x)(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a))=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3a-x=1,\\ 2x+2a-5=x-a\end{array}\right.\\ 3a-x>0,\\ 2x+2a-5>0,\\ x-a>0,\\ 0\le x\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3a-1,\\ 0\le 3a-1\le 2,\\ 3a-(3a-1)>0,\\ 2(3a-1)+2a-5>0,\\ (3a-1)-a>0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=5-3a,\\ 0\le 5-3a\le 2,\\ 3a-(5-3a)>0,\\ 2(5-3a)+2a-5>0,\\ (5-3a)-a>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3a-1,\\ 1\le a<\frac{5}{4};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=5-3a,\\ \frac{7}{8}<a\le 1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Видно, что при $a=1$ «работают» оба корня, а при остальных только один. Проверим, разные они или одинаковые: $3a-1=5-3a\Leftrightarrow a=1$. Поэтому получаем

Ответ. $\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}\ln(4x-3)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$.

Решение. *Первый способ* (алгебраический). Записываем полностью равносильную систему:

$$\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}\ln(4x-3)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4x-3>0,\\ x^2+4x-4a-a^2\ge 0,\\ x\in[0;2],\\ \left[\begin{array}{l}4x-3=1,\\ x^2+4x-4a-a^2=0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1,\quad 5-4a-a^2\ge 0;\\ x=a\in\left(\frac{3}{4};2\right];\\ \left\{\begin{array}{l}x=-4-a,\\ \frac{3}{4}<-4-a\le 2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\ a\in[-5;1],\\ x=a,\ a\in\left(\frac{3}{4};2\right],\\ x=-4-a,\ a\in\left[-6;-4\frac{3}{4}\right).\end{array}\right.$$

Проверим, когда корни совпадают:

$$x=1=a,$$
$$x=1=-4-a\Leftrightarrow a=-5,$$
$$x=a=-4-a\Leftrightarrow a=-2\Rightarrow$$
$$x=-2\notin[0;2]\Leftrightarrow\varnothing.$$

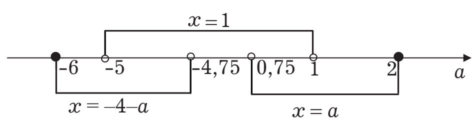

Рис. 9

Поэтому корень один, когда

$$a\in[-6;-5]\cup[-4{,}75;0{,}75]\cup[1;2],$$

см. рис. 9.

Ответ. $[-6;-5]\cup[-4{,}75;0{,}75]\cup[1;2]$.

Второй способ (с применением графиков). Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x-3>0, \\ (x-a)(x+4+a)\le 0, \\ x\in[0;2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{3}{4};2\right], \\ (x-a)(x+4+a)\le 0. \end{cases}$$

Построим «ОДЗ» – это трапеция $ABCD$ на рис. 10. Решаем уравнение:

$$\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}\ln(4x-3)=0$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{aligned} &4x-3=1, \\ &(x-a)(x+4+a)=0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=1, \\ &x=a, \\ &x=-4-a. \end{aligned}\right.$$

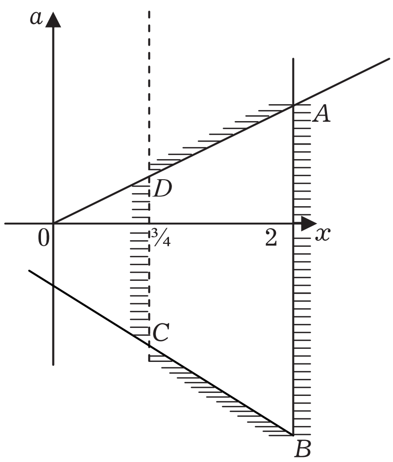

Рис. 10

Далее проведём прямые $x=1$, $x=a$, $x=-4-a$, см. рис. 11. Видно, что вторая и третья прямые совпадают с границей.

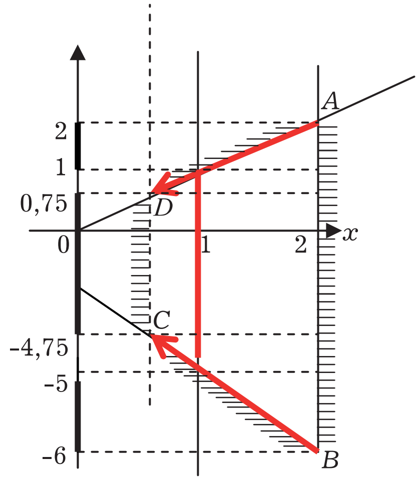

Рис. 11

Из рис. 11 получаем ответ.
Ответ. $[-6;-5]\cup[-4{,}75;0{,}75]\cup[1;2]$.

Пример 5. Решите уравнение

$$x\sqrt{x-0{,}1}-\sqrt{(x-0{,}1)(4x-0{,}66)}=0.$$

Решение. Этот пример, не содержащий параметра, решим для того, чтобы понятней было решение следующего.

Заметим, что бином $x-0{,}1$ встречается под знаком двух корней. Нельзя ли его вынести как общий множитель? Оказывается, нельзя. Уравнение

$$x\sqrt{x-0{,}1}-\sqrt{(x-0{,}1)(4x-0{,}66)}=0$$

не равносильно уравнению

$$\sqrt{x-0{,}1}\left(x-\sqrt{4x-0{,}66}\right)=0,$$

так как $x=0{,}1$ является решением первого, но не является решением второго, потому что $\sqrt{4\cdot 0{,}1-0{,}66}$ не существует!

Приведём два возможных способа решения этого уравнения.

Первый способ.

$$x\sqrt{x-0,1}-\sqrt{(x-0,1)(4x-0,66)}=0 \Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{x-0,1}=\sqrt{(x-0,1)(4x-0,66)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 0,1, \\ x^2(x-0,1)=(x-0,1)(4x-0,66)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0,1,\\ \left[\begin{array}{l} x-0,1=0,\\ x^2=4x-0,66\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,1,\\ x=2\pm\sqrt{3,34}.\end{array}\right.$$

$$2-\sqrt{3,34}\vee 0,1 \Leftrightarrow 1,9\vee\sqrt{3,34}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3,61>3,34 \Rightarrow 2-\sqrt{3,34}>0,1.$$

Ответ. $\{0,1;2\pm\sqrt{3,34}\}$.

Второй способ.

$$x\sqrt{x-0,1}-\sqrt{(x-0,1)(4x-0,66)}=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0,1,\\ \begin{cases} x-0,1>0,\\ x=\sqrt{4x-0,66}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,1,\\ \begin{cases} x>0,1,\\ x^2-4x+0,66=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,1,\\ \begin{cases} x>0,1,\\ x=2\pm\sqrt{3,34}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,1,\\ x=2\pm\sqrt{3,34}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\{0,1;\ 2\pm\sqrt{3,34}\}$.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение. *Первый способ* (самый естественный). Учитывая замечания предыдущего примера, имеем:

$$\begin{cases} x\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a},\\ x\in[0;1]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)},\\ x\in[0;1]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[0;1],\\ x-a\ge 0,\\ x^2(x-a)=(x-a)(4x-2)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0;1],\\ x-a\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x-a=0,\\ x^2-4x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[0;1],\\ x-a\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x=a,\\ x=2-\sqrt{2}<1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\in[0;1],\\ x=2-\sqrt{2}\ge a.\end{array}\right.$$

Очевидно, что при $a=2-\sqrt{2}$ корни совпадают. Поэтому один корень будет при

$$a\in(-\infty;0)\cup\left[2-\sqrt{2};1\right],$$

см. рис. 12.

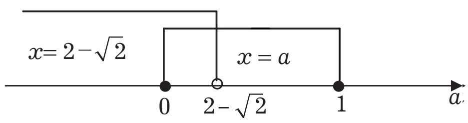

Рис. 12

Ответ. $(-\infty;0)\cup\left[2-\sqrt{2};1\right]$.

Второй способ (самый «коварный»). Можно заметить, что

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)},$$

но вынести общий множитель $\sqrt{x-a}$ нельзя. Дело в том, что уравнения $x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)}$ и

$$\sqrt{x-a}\left(x-\sqrt{4x-2}\right)=0$$

имеют разные ОДЗ: в первом уравнении $x=a$ является решением при любом a, а $x=a$ является решением второго уравнения при условии, что $4x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$, т. е. при $a\geq\frac{1}{2}$!

Поэтому уравнение

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)}$$

не равносильно уравнению

$$\sqrt{x-a}\left(x-\sqrt{4x-2}\right)=0\ !$$

Решим уравнение на отрезке [0; 1]:

$$\begin{cases} x\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}, \\ x\in[0;1] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)}, \\ x\in[0;1] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=a\in[0;1], \\ \begin{cases} x-a>0, \\ x\in[0;1] \\ x=\sqrt{4x-2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in[0;1], \\ \begin{cases} x\in[0;1], \\ x^2=4x-2 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}>a \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in[0;1], \\ x=2-\sqrt{2}>a \Rightarrow \text{общих корней нет.} \end{array}\right.$$

Видно, что решение одно, если

$$a\in(-\infty;0)\cup\left[2-\sqrt{2};1\right],$$

см. рис. 12.

Ответ. $a\in(-\infty;0)\cup\left[2-\sqrt{2};1\right]$.

Третий способ (графический). Пример отличается от многих тем, что имеет «необычное» ОДЗ. Запишем его:

$$\begin{cases} x-a\geq 0, \\ (x-a)(4x-2)\geq 0, \\ x\in[0;1] \end{cases}$$

и изобразим на рис. 13 – это отрезок AE и внутренность ломаной $CBAD$, включая её границы.

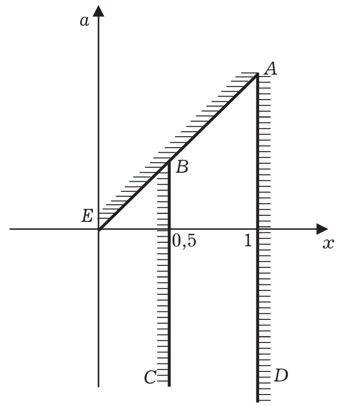

Рис. 13

Решаем уравнение:

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a(4x-2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \\ x=2-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Видно, что решением является граничный отрезок OA и луч $x=2-\sqrt{2}$, см. рис. 14.

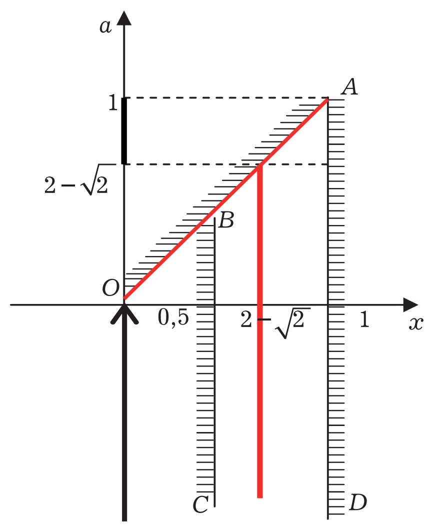

Рис. 14

Из рис. 14 получаем ответ.

Ответ. $a\in(-\infty;0)\cup\left[2-\sqrt{2};1\right]$.