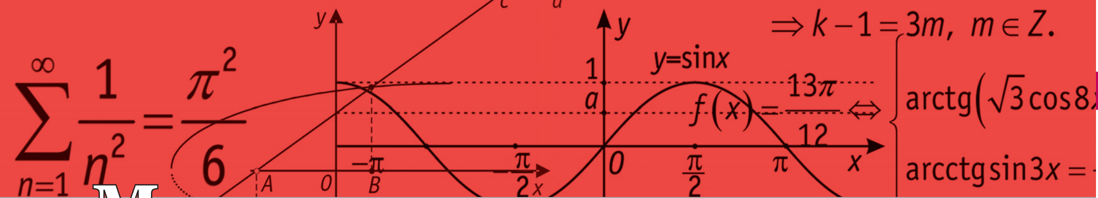

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

А где же квадратные уравнения? …Нашлись…

Эту статью, наверное, правильнее назвать «Вариации на тему одной системы уравнений».

Приведённые решения совершенно разные.

Постоянные читатели нашего журнала, вероятно, заметили особую любовь автора к привлечению графиков элементарных функций к решению не самых простых задач.

Эту статью можно считать дополнением к статье Ю. О. Пукаса, опубликованной в нашем журнале (Потенциал, № 7, 2019), где представлено решение рассматриваемых задач с исследованием дискриминантов.

Аналогичная статья с аналитическим решением была и раньше (Потенциал, №11, 2018). Ни в одной из них не представлено подробного исследования дискриминантов, а приведены лишь результаты в виде таблиц.

В первой части статьи читатель не найдёт ни квадратных уравнений, ни дискриминантов – только две классические гиперболы и три прямых, параллельных биссектрисе координатного угла, количество пересечений которых с гиперболой определит число корней заданной системы уравнений с параметром.

После завершения первой части любопытство автора этой статьи взяло верх над нежеланием исследовать дискриминанты квадратных уравнений. Стало интересно, громоздко это или не очень, легко ли просмотреть все варианты знаков дискриминантов и составить соответствующие таблицы. Так появились остальные части.

Так как тема привлекла внимание авторов журнала дважды, то мы решили привести побольше примеров оформления подобных задач.

Оказалось, что решение заметно зависит от того, какое равносильное соотношение будет выписано.

Так как решения оказались разными, то их рассмотрение будет полезна не только школьникам и учителям, но и экспертам, проверяющим ЕГЭ.

Заметим, что приведённые методы не исчерпывают всего множества способов решения заданной системы.

п.1 Решение задач без квадратных уравнений

Задана система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

Далее ставятся различные задачи по отношению к количеству корней системы с параметром.

Прежде, чем решать задачи, заметим, что $a\geq 0$, но при $a=0$ и при $a>0$ решения уравнения $|xy|=a$ разные (да и в уравнении $(ay+ax+4)(x+y+3a)=0$ при $a=0$ первая скобка превращается в константу).

Поэтому выделим этот случай отдельно. При $a=0$ система примет вид

$$\begin{cases}x+y=0\\ |xy|=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0\ ,$$

откуда следует, что решение при $a=0$ одно.

Перепишем систему для $a>0$:

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|xy|=a,\\ \left[\begin{array}{l}y=-x-3a,\\ y=-x-\dfrac{4}{a}\end{array}\right.\end{cases}\qquad(1)$$

Для решения задачи нам нужно:

1) эскизы двух гипербол: $xy=a,\ \ xy=-a,\ \ a>0$ – рис. 1а,

2) касательная к нижней части гиперболы $xy=a$ – штрихпунктирная линия, параллельная, в силу симметричности гиперболы, биссектрисе $y=-x$ – рис. 1а,

3) прямые $y=-x-3a,\ y(0)=-3a$ – сплошная линия на любом рисунке, $y=-x-\dfrac{4}{a}, y(0)=-\dfrac{4}{a}$ – пунктирная линия.

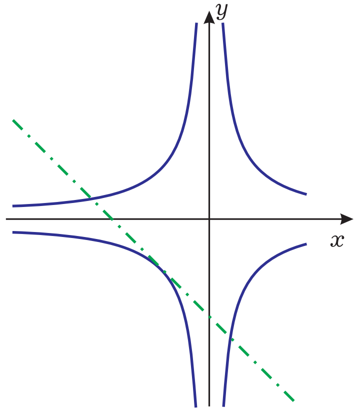

Рис. 1а

Они параллельны между собой и параллельны касательной.

Нам потребуются точки пересечения касательной и прямых с осью Оу.

Заметим, что, так как касательная параллельна биссектрисе (и нашим прямым $y=-x-3a$, $y=-x-\dfrac{4}{a}$ из совокупности (1)) и проходит через вершину $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{a}\right)$ гиперболы, то она имеет уравнение $y=-x+b$.

Определим b:

$$-\sqrt{a}=\sqrt{a}+b\Rightarrow y=-x-2\sqrt{a}, y(0)=-2\sqrt{a}.$$

При этом касательная пересекает ось Оу в точке $y=-2\sqrt{a}$.

Нам важно, что взаимное расположение всех трёх прямых однозначно определяется точками пересечения их с осью Оу – числами $-2\sqrt{a},\ -3a,\ -\dfrac{4}{a}$.

В задачах нас будет интересовать количество решений, а оно как раз и зависит от взаимного расположения всех трёх прямых.

Начнём решать задачи.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет 8 различных решений.

► Это самая простая задача. Посмотрим на рис. 1б, где $y=-x-3a, y(0)=-3a$ - сплошная линия, $y=-x-\dfrac{4}{a}, y(0)=-\dfrac{4}{a}$ – пунктирная линия, и поймём, что 8 решений будет, если каждая из прямых $y=-x-3a$ и $y=-x-\dfrac{4}{a}$ пересечёт обе гиперболы – рис. 1б и 1в.

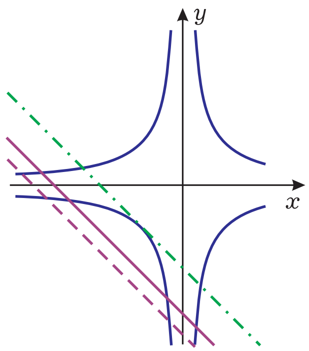

Рис. 1б. $a\in\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

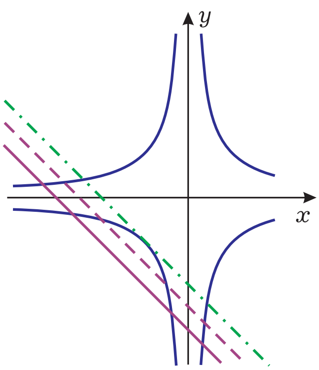

Рис. 1в. $a\in\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$

А это имеет место, если обе прямые различны и расположены ниже касательной, независимо от их взаимного расположения, т. е. выполнены условия

$$\begin{cases}-3a<-2\sqrt{a},\\ -\dfrac{4}{a}<-2\sqrt{a},\\ -3a\neq-\dfrac{4}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{a}<3a\Leftrightarrow a>\dfrac{4}{9},\\ 2\sqrt{a}<\dfrac{4}{a}\Leftrightarrow a<\sqrt[3]{4},\\ a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right).$$

Ответ. $\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$. ◄

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет 6 различных решений.

► На рисунках 2а и 2б ($y=-x-3a$, $y(0)=-3a$ – сплошная линия, $y=-x-\dfrac{4}{a}$, $y(0)=-\dfrac{4}{a}$ – пунктирная линия) видно, что 6 решений будет, если

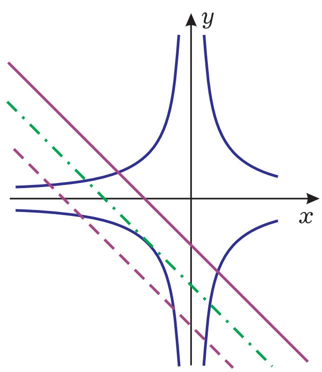

Рис. 2а. $a\in\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$

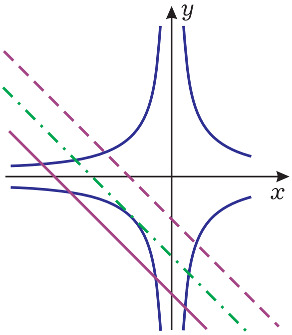

Рис. 2б. $a \in \left(\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$

этом случае решений может быть не меньше двух.

Когда два? Только на рис. 3а, на котором прямая, заметьте, «странно» отмечена. Это случай, когда прямые $y=-x-3a$ и $y=-x-\frac{4}{a}$ совпадают и расположены выше касательной.

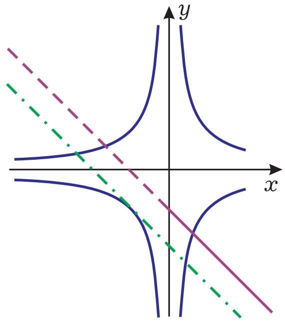

*Рис**. 3а*

одна из прямых пересекает одну гиперболу, а другая – обе.

Здесь, как видим, решение задачи может зависеть от взаимного расположения прямых.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3a>-2\sqrt{a},\\ -\frac{4}{a}<-2\sqrt{a};\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{4}{a}>-2\sqrt{a},\\ -3a<-2\sqrt{a}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sqrt{a}>3a,\\ 2\sqrt{a}<\frac{4}{a}\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{4}{9};\\ \begin{cases}2\sqrt{a}>\frac{4}{a},\\ 2\sqrt{a}<3a\end{cases} \Leftrightarrow a>\sqrt[3]{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right).$$

Ответ. $\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$. ◀

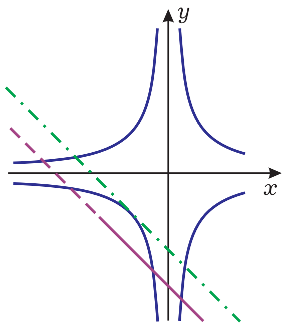

Рис. 3б. $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно, но меньше 6 различных решений.

► Заметим, что уже в записи равносильной совокупности (перед задачей 1) указано $a=0$, при котором система имеет единственное решение $x=y=0$. Если $a>0$, то $|xy|=a$ – это уже пара гипербол. И видно, что в

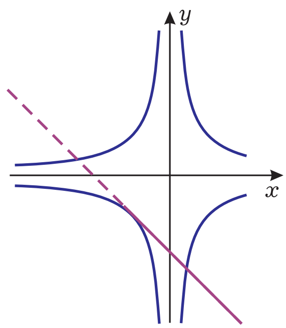

*Рис**. 3в*

Но они могут совпадать и тогда, когда расположены ниже касательной – тогда будет четыре решения – рис. 3б, или обе совпадают с касательной – тогда будет три решения – рис. 3в.

Во всех трёх случаях решения существуют, и их меньше шести, если выполнено условие

$$-x-3a=-x-\frac{4}{a}\Leftrightarrow 3a=\frac{4}{a}\Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Всё-таки любопытно – когда это происходит на самом деле – на рис. 3а, 3б или 3в? Сравним $-3a$ и $-2\sqrt{a}$ при $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$-3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\vee-2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\vee\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}<3\Rightarrow-3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}<-2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

а это значит, что имеет место рис. 3б – совпадающие прямые расположены ниже касательной – четыре решения.

Оказалось, что двух или трёх решений не может быть (не существующие ситуации мы отметили звёздочками над словом Рис.). Интересно!

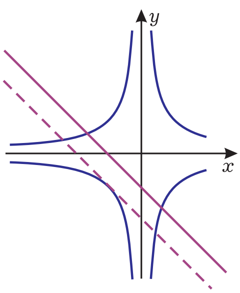

*Рис**. 4а*

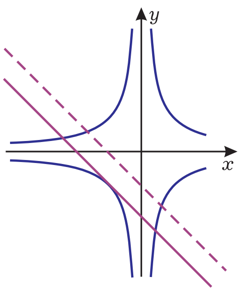

*Рис** 4б*

Меньше шести решений и тогда, когда обе прямые находятся не ниже касательной – рис 4а, б, в, г.

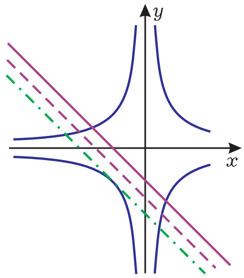

*Рис**. 4в*

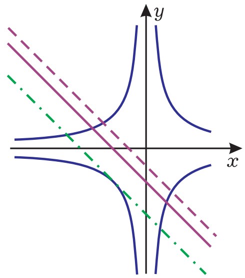

*Рис**. 4г*

Это имеет место, если выполнены условия:

$$\begin{cases}-\frac{4}{a}\ge-2\sqrt{a}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}\ge\frac{4}{a}\Leftrightarrow a\ge\sqrt[3]{4},\\ -3a\ge-2\sqrt{a}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}\ge 3a\Leftrightarrow a\le\frac{4}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$$

Интересно! Оказалось, что и пяти решений не может быть, но и четырёх, кроме случая совпадающих прямых, тоже нет.

Как показали вычисления, ни один из вариантов 4а, б, в, г не существует в данной задаче.

Итак, решение хотя бы одно существует, но их меньше 6, имеет место всего в двух случаях: оно либо одно – при $a=0$, либо их четыре – при $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\left\{0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$ ◄

Задача 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно, но не более 6 различных решений.

►Для решения этой задачи надо просто объединить ответы задач 1 и 3.

Оказывается, что заданная система имеет хотя бы одно, но не более 6 различных решений всего в трёх случаях:
оно либо одно – при $a=0$, либо их четыре – при $\frac{2}{\sqrt{3}}$ – рис. 3б, либо ровно 6 при $a\in\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$ – рис. 2а, 2б.

Поэтому решением этой задачи будут

$$a\in\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)\cup\left\{0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[0;\frac{4}{9}\right)\cup\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right).$$

Ответ. $\left[0;\frac{4}{9}\right)\cup\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$. ◄

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет 7 различных решений.

►Решение задачи может быть, если одна из прямых: $y=-x-3a$, $y(0)=-3a$ (сплошная линия) или $y=-x-\frac{4}{a}$, $y(0)=-\frac{4}{a}$ (пунктирная линия) совпадёт с касательной, а другая окажется ниже касательной – рис. 5а, б.

На рис. 5а:

$$-3a=-2\sqrt{a}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}=3a\Leftrightarrow a=\frac{4}{9}.$$

Проверим взаимное расположение прямых $y=-3a$ и $y=-\frac{4}{a}$ при этом значении a:

$$-\frac{4\cdot 9}{4}\vee -3\cdot\frac{4}{9}\Rightarrow -9<-\frac{4}{3}\Rightarrow -\frac{4}{a}<-3a -$$

соответствует картинке на рис. 5а.

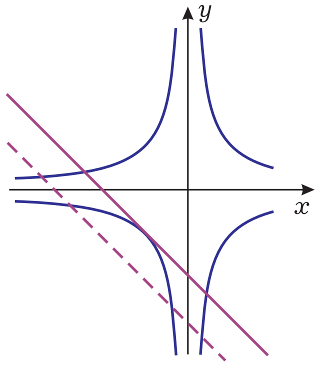

Рис. 5а. $a=\frac{4}{9}$

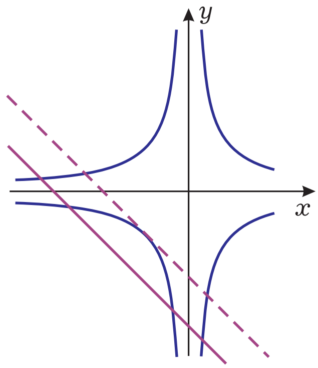

Рис. 5б. $a=\sqrt[3]{4}$

На рис. 5б:

$$-\frac{4}{a}=-2\sqrt{a}\Leftrightarrow\sqrt{a}=\frac{2}{a}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{4}.$$

Проверим взаимное расположение прямых $y=-3a$ и $y=-\frac{4}{a}$ при этом значении a:

$$-3\cdot\sqrt[3]{4}\vee-\frac{4}{\sqrt[3]{4}}\Leftrightarrow -3<-\sqrt[3]{4}\Rightarrow -3a<-\frac{4}{a} -$$

соответствует картинке на рис. 5б.

Условию задачи удовлетворяют два значения: $a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$.

Ответ. $\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$. ◄

п.2 А вот и квадратные уравнения нашлись…

Задана система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

Решим все возможные задачи: исследуем вопрос о том, когда и сколько решений имеет заданная система уравнений.

► Так как a входит в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно.

1) Заданная система примет вид

$$\begin{cases}x+y=0\\ |xy|=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0$$ – **<u>решение одно</u>**

Так как $|xy|=a\ge 0$, то теперь будем рассматривать только $a>0$.

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=a,\\ x^2+3ax+a=0\Rightarrow D_1=a(9a-4),(1)\\ ax^2+4x+a^2=0\Rightarrow \dfrac{D_3}{4}=4-a^3;\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-a,\\ x^2+3ax-a=0\Rightarrow D_2=a(9a+4),(2)\\ ax^2+4x-a^2=0\Rightarrow \dfrac{D_4}{4}=4+a^3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что мы записали больше, чем обычно записывают в совокупности – мы сразу выписали дискриминанты. Это что-то даёт? Да, и довольно много.

Во-первых, очевидно, что $D_1\ne D_2$; $D_3\ne D_4$ – поэтому, если каждая система имеет 4 разных решения, то обе будут иметь при этом 8 различных решений.

Во-вторых, каждое уравнение второй системы имеет по два различных решения, т. к. и $D_2>0$, и $D_4>0$.

2) Квадратные уравнения $x^2+3ax-a=0$ и $ax^2+4x-a^2=0$ имеют по два решения, но нас интересуют различные корни. Вопрос: могут ли эти уравнения иметь хотя бы один общий корень? Этот вопрос можно решать по-разному.

Мы поступим так: пусть существует общий корень x_0:

$$\begin{cases}x_0^2+3ax_0-a=0,\\ ax_0^2+4x_0-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+3ax_0-a=0,\\ x\left(3a^2-4\right)=0\end{cases}\overset{x\ne0,a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x\ne0,a>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a=\dfrac{2}{\sqrt3},\\ x_0=-\sqrt3\pm\sqrt{3+\dfrac{2}{\sqrt3}}\end{cases}$$

– уравнения системы (2) при этом просто совпадают:

$$\begin{cases}x^2+2\sqrt3x-\dfrac{2}{\sqrt3}=0\Leftrightarrow x=-\sqrt3\pm\sqrt{3+\dfrac{2}{\sqrt3}},\\ \dfrac{2}{\sqrt3}\left(x^2+2\sqrt3-\dfrac{2}{\sqrt3}\right)=0\end{cases}$$

Отсюда следует, что, если общий корень существует, то при этом и второй корень – тоже общий. Это значит, что при $a=\dfrac{2}{\sqrt3}$ система (2) имеет два разных корня, а трёх разных корней она иметь не может.

Итак, система (2) имеет либо 4 различных корня при $\underline{a \ne \frac{2}{\sqrt{3}}}$, либо 2 при $\underline{a = \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

3) Займёмся системой (1).

В отличие от системы (2), здесь дискриминанты могут иметь разные знаки.

a) Рассмотрим сначала, что происходит с системой при $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{cases} x^2 + 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 4x + \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \frac{2}{\sqrt{3}}}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2 + 2\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$

– система (1) при $\underline{a = \frac{2}{\sqrt{3}}}$ имеет 2 различных решения.

Заметим, что при этом значении $\underline{a = \frac{2}{\sqrt{3}}}$ **<u>совокупность имеет 4 различных решения.</u>**

b) Пусть теперь $\underline{a \ne \frac{2}{\sqrt{3}}}$. Могут ли уравнения системы (1) иметь хотя бы один общий корень при $\underline{a \ne \frac{2}{\sqrt{3}}}$?

Пусть таковой x_0 существует:

$$\begin{cases} x_0^2 + 3ax_0 + a = 0, \\ ax_0^2 + 4x_0 + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 + 3a^2x_0 + a^2 = 0, \\ x\left(3a^2 - 4\right) = 0 \end{cases} \overset{x\ne 0, a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x\ne 0, a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ x_0 = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \frac{2}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Но... оказалось, что только при уже знакомом значении $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ может быть общий корень, но их сразу оба, а этот случай уже исследован.

4) Итак, при $a \ne \frac{2}{\sqrt{3}}$ общих корней нет А что есть?

a) Оба уравнения имеют по два корня:

$$\begin{cases} D_1 = a(9a - 4) > 0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a > \frac{4}{9}, \\ D_3 = 4 - a^3 > 0 \Leftrightarrow a < \sqrt[3]{4}, \\ a \ne \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\underline{\Leftrightarrow a \in \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \sqrt[3]{4}\right)}$ – система (1) имеет 4 различных решения.

Тогда совокупность в этом случае имеет 8 различных корней.

b) Одно уравнение имеет 2 корня, а второе – ни одного:

$$D_1 \cdot D_3 < 0 \Leftrightarrow a\left(a - \frac{4}{9}\right)\left(4 - a^3\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$\underline{\Leftrightarrow a \in \left(0; \frac{4}{9}\right) \cup \left(\sqrt[3]{4}; +\infty\right)}$ – система (1) имеет 2 различных корня.

Тогда совокупность в этом случае имеет 6 различных корней.

c) Ни одно из уравнений не имеет решений: $\begin{cases} 9a - 4 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{4}{9}, \\ 4 - a^3 < 0 \Leftrightarrow a > \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

d) Одно уравнение имеет два решения, а другое одно:

$$\left[\begin{array}{l} D_1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{D_3}{4} = 4 - \left(\frac{4}{9}\right)^3 > 0 \\ D_3 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4} \Rightarrow D_1 = \sqrt[3]{4}\left(9\sqrt[3]{4} - 4\right) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a \in \left\{\frac{4}{9}; \sqrt[3]{4}\right\}$ **– система (1) имеет 3 различных решения.**

Тогда совокупность в этом случае имеет 7 различных корней.

Замечание. Пожалуй, в этой методике не очень приятно находить a, при которых корни могут совпадать, если это делать «в лоб». Например, для системы (2) (выкладки для системы (1) абсолютно аналогичны)

$$\left[\begin{array}{l} x_5 = x_7, \\ x_4 = x_6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 4a}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 + a^3}}{a}, \\ \frac{-3a - \sqrt{9a^2 + 4a}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{4 + a^3}}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\sqrt{9a^2 + 4a} - 2\sqrt{4 + a^3} = 3a^2 - 4, \\ a\sqrt{9a^2 + 4a} - 2\sqrt{4 + a^3} = 4 - 3a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\left(3a^2 - 4\right)\left(3a^2 + 4\right)}{a\sqrt{9a^2 + 4a} + 2\sqrt{4 + a^3}} = 3a^2 - 4, \\ \frac{\left(3a^2 - 4\right)\left(3a^2 + 4\right)}{a\sqrt{9a^2 + 4a} + 2\sqrt{4 + a^3}} = 4 - 3a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3a^2 - 4\right)\left(a\left(\sqrt{9a^2 + 4a} - 3a\right) + 2\sqrt{4 + a^3} - 4\right) = 0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \left(3a^2 - 4\right)\left(a\sqrt{9a^2 + 4a} + 2\sqrt{4 + a^3} + 3a^2 + 4\right) = 0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

п. 3 Прямые, гиперболы и … квадратные уравнения

Дана система уравнений

$$\begin{cases} (ay + ax + 4)(x + y + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

Выяснить, при каких значениях параметра a система имеет 1,2, …, 8 решений.

► Так как a входит в качестве коэффициента при x и y, то случай $a = 0$ выделим отдельно: система примет вид

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ |xy| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow a = 0$$

– решение одно

Так как $|xy| = a \geq 0$, то теперь будем рассматривать только $a > 0$.

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases} (ay + ax + 4)(x + y + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |xy| = a, \\ \left[\begin{array}{l} y = -x - 3a, \\ y = -x - \frac{4}{a} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} xy=a, \\ \dfrac{a}{x}=-x-3a \Leftrightarrow x^2+3ax+a=0, \quad (1) \\ \dfrac{a}{x}=-x-\dfrac{4}{a} \Leftrightarrow ax^2+4x+a^2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-a, \\ -\dfrac{a}{x}=-x-3a \Leftrightarrow x^2+3ax-a=0, \ (2) \\ -\dfrac{a}{x}=-x-\dfrac{4}{a} \Leftrightarrow ax^2+4x-a^2=0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Видно, что количество решений заданной системы уравнений зависит от числа точек пересечения прямых $y=-x-3a, y=-x-\frac{4}{a}$ с гиперболами $xy=\pm a$, или, что то же, от количества решений четырёх квадратных уравнений.

Начертим эскиз гиперболы $xy=-a$ - рис. 1.

Прямые $y=-x-3a, y=-x-\frac{4}{a}$ параллельны. Видно, что каждая из них пересекает гиперболу $xy=-a$ два раза. Обе прямые пересекают гиперболу либо 4 раза (рис. 1), если они не совпадают, либо два раза (рис. 2), если совпадают. Они совпадают, если $-x-3a=-x-\frac{4}{a} \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

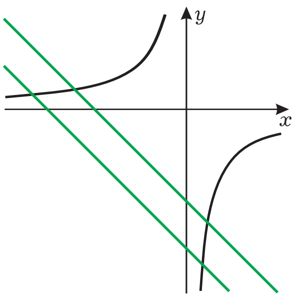

Рис. 1. $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$

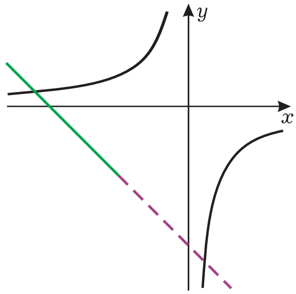

Рис. 2. $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Теперь займёмся второй гиперболой. Начертим эскиз гиперболы $xy=a$ и всевозможные расположения прямых $y=-x-3a, y=-x-\frac{4}{a}$ (рис. 3 – 6).

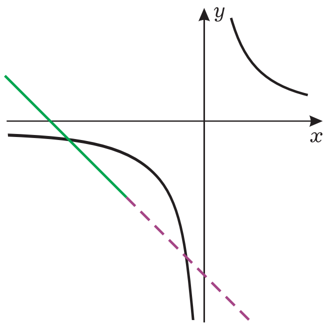

Рис. 3. $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$

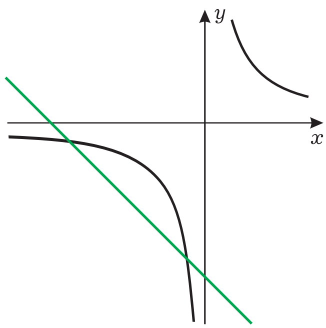

Рис. 4. $a \in \left(0;\frac{4}{9}\right) \cup \left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$

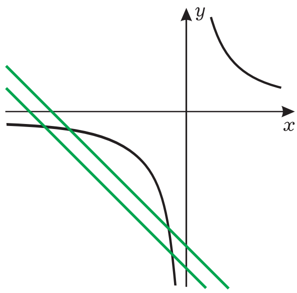

Рис. 5. $a\in\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$

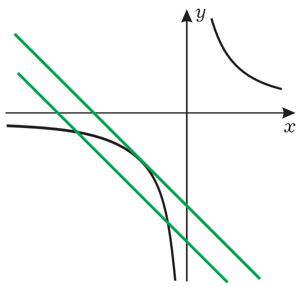

Рис. 6. $a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$

Видно, что пара прямых $y=-x-3a,\ y=-x-\frac{4}{a}$ может пересекать гиперболу

1) *a*) либо всего два раза, если они совпадают, т. е. $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, при этом $D_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(9\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-4\right)>0$ – пересечений два (рис. 3) **и совокупность имеет 4 решения,**

b) либо одно уравнение имеет два решения, второе ни одного:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a(9a-4)<0,\\ 4-a^3>0\Rightarrow x_2\neq x_6,\end{cases}\\ \begin{cases}a(9a-4)>0\Rightarrow x_1\neq x_5,\\ 4-a^3<0\end{cases}\end{array}\right.\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a\in\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$$

– рис. 4 – при этом **совокупность имеет 6 решений,**

2) либо 4 раза, если они различны ($a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}$) – оба дискриминант положительны:

$$\begin{cases}a\neq\frac{2}{\sqrt{3}},\\ a(9a-4)>0,\\ 4-a^3>0\end{cases}\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a\in\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$$

– рис. 5 – при этом **совокупность имеет 8 решений,**

3) либо 3 раза, если они различны, но одна из прямых касается гиперболы – один из дискриминантов равен 0, а другой при этом положителен:

$$\left[\begin{array}{l}a=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{D_3}{4}=4-\left(\frac{4}{9}\right)^3>0\Rightarrow x_3\neq x_7,\\ a=\sqrt[3]{4}\Rightarrow D_1=\sqrt[3]{4}\left(9\sqrt[3]{4}-4\right)>0\Rightarrow x_1\neq x_5\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$ – рис. 6 – при этом **совокупность имеет 7 решений.**

Ответ. $a=0$ – одно решение;

два, три, пять решений – $\varnothing$;

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, – четыре решения (рис. 2 + рис. 3);

$a\in\left(0;\frac{4}{9}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$ – шесть решений (рис. 1 + рис. 4);

$a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$ – семь решений (рис.1 + рис. 6);

$a\in\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$ – восемь решений (рис. 1+рис. 5).

(продолжение в следующем номере)