Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

А где же квадратные уравнения? … Нашлись…

Странное название… Да – это продолжение статьи, опубликованной в предыдущем номере.

В двух номерах нашего журнала были опубликованы статьи, в которых задачи решались с помощью квадратных уравнений, но самих решений не было – были представлены только результаты исследования в виде таблиц.

В предыдущем номере эти задачи решены автором без квадратных уравнений – с помощью графиков параллельных прямых и классических гипербол. Спрашивается: а где же квадратные уравнения?

Затем квадратные уравнения «нашлись» – нижеприведённая система полностью исследована с привлечением квадратных уравнений.

Теперь приведены, наверное, более привычные для школьников решения конкретных задач как с использованием квадратных уравнений, так и с привлечением графиков прямых и гипербол.

п.4 Аналитические и смешанные решения конкретных задач

В этом пункте рассмотрим задачи, или чисто аналитически исследуя лишь квадратные уравнения, или к исследованию квадратных уравнений привлечём и их «предшественников» – уравнений, описывающих пересечение гипербол прямыми. При этом рассуждения относительно способов решений квадратного уравнения в разных задачах могут отличаться.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет 8 различных решений.

► Это самая простая задача для заданной системы.

Первый способ («работают» только квадратные уравнения).

Так как a входит в систему в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно – система примет вид:

$$\begin{cases}x+y=0\\ |xy|=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \text{ – } \textit{решение одно.}$$

Так как $|xy|=a\geq 0$, то теперь будем рассматривать только $a>0$.

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=a,\\ x^2+3ax+a=0, & (\mathbf{1})\\ ax^2+4x+a^2=0;\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-a,\\ x^2+3ax-a=0, & (\mathbf{2})\\ ax^2+4x-a^2=0\end{cases}\end{array}\right. \quad (*)$$

Система имеет 8 решений, если системы (**1**) и (**2**) имеют по 4 различных решения, т. е. по крайней мере все дискриминанты должны быть положительными:

$$\begin{cases}D_1=a(9a-4)>0,\\ \dfrac{D_2}{4}=4-a^3>0,\\ D_3=a(9a+4)>0,\\ \dfrac{D_4}{4}=4+a^3>0\end{cases} \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a\in\left(\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right)$$

Но все ли корни различны?

Допустим, что уравнения системы (**1**) имеют общий корень x_0:

$$\begin{cases}x_0^2+3ax_0+a=0,\\ ax_0^2+4x_0+a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}ax_0^2+3a^2x+a^2=0,\\ ax_0^2+4x+a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}ax_0^2+3a^2x_0+a^2=0,\\ x(3a^2-4)=0\end{cases} \overset{x\neq 0, a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x\neq 0, a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}a=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\\ x_0=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\end{cases}$$

Это значит, что, если совпал один корень, то совпал и другой – уравнения совпали: при $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ решений меньше 8.

Аналогично показывается, что, если совпал один корень в системе (**2**), то совпал и другой, при этом корни совпадают при том же $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Корни уравнений системы (**1**) и (**2**) при $a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ между собой разные:

$$\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\dfrac{-3a\pm\sqrt{a(9a-4)}}{2},\\ x_{5,6}=\dfrac{-3a\pm\sqrt{a(9a+4)}}{2},\\ x_{3,4}=-4\pm\sqrt{4-a^3},\\ x_{7,8}=-4\pm\sqrt{4+a^3}\end{array}\right.$$

Следовательно, при $a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *все* корни систем различны.

Ответ. $\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right).$

Второй способ («работают» прямые и квадратные уравнения).

Так как a входит в систему в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно – система примет вид:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ |xy|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 - \text{ решение одно.}$$

Так как $|xy|=a\geq 0,$, то теперь будем рассматривать только $a>0$.

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases} (ay+ax+4)(x+y+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=a, \\ \dfrac{a}{x}=-x-3a, \\ \dfrac{a}{x}=-x-\dfrac{4}{a}; \end{cases} \quad (\mathbf{1}) \\ \begin{cases} xy=-a, \\ -\dfrac{a}{x}=-x-3a, \\ -\dfrac{a}{x}=-x-\dfrac{4}{a} \end{cases} \quad (\mathbf{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=a, \\ x^2+3ax+a=0 \Rightarrow D_1=a(9a-4), \; (\mathbf{3}) \\ ax^2+4x+a^2=0 \Rightarrow \dfrac{D_3}{4}=4-a^3; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-a, \\ x^2+3ax-a=0 \Rightarrow D_2=a(9a+4), \; (\mathbf{4}) \\ ax^2+4x-a^2=0 \Rightarrow \dfrac{D_4}{4}=4+a^3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Система имеет 8 решений, если системы (**3**) и (**4**) имеют по 4 различных решения.

Очевидно, что каждое уравнение второй системы имеет 2 решения, так как $D_2>0, D_4>0$. Но все ли они различны?

Очевидно, что уравнения в системах (**3**) и (**4**) совпадают, если $-x-3a=-x-\dfrac{4}{a} \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, так как совпадают правые части уравнений в системах (**1**) и (**2**) промежуточной совокупности.

Поскольку прямые параллельны и, если не совпадают ($a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$), то пересекают гиперболы в 4-х различных точках, т. е. их дискриминаты положительны:

$$\begin{cases} D_1=a(9a-4)>0, \\ \dfrac{D_2}{4}=4-a^3>0, \\ D_3=a(9a+4)>0, \\ \dfrac{D_4}{4}=4+a^3>0, \\ a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \overset{a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a\in\left(\frac{4}{9};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right).$$

Ответ. $\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\sqrt[3]{4}\right)$. ◄

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay+ax+4)(x+y+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases}$$

имеет 4 различных решения.

► **Первый способ** (работа с квадратными уравнениями)

Так как a входит в систему в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно – система примет вид:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ |xy|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \text{ – } \textit{решение одно.}$$

Так как $|xy|=a\ge 0,$ то теперь будем рассматривать только $a>0.$

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases} (ay+ax+4)(x+y+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases} \overset{a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=a, \\ x^2+3ax+a=0, \\ ax^2+4x+a^2=0; \end{cases} \quad \textbf{(1)} \\ \begin{cases} xy=-a, \\ x^2+3ax-a=0, \\ ax^2+4x-a^2=0 \end{cases} \quad \textbf{(2)} \end{array}\right. \qquad (*)$$

Увидев квадратные уравнения, школьник, особенно из профильного класса, мгновенно решит, что задача вполне «решабельна». Что может быть проще квадратных трёхчленов?

Подойдём и мы к исследованию формально.

Видно, что число решений системы определяется количеством решений четырёх квадратных уравнений в совокупности (*).

Когда решений может быть ровно 4?

1) Каждое из 4-х уравнений имеет по одному решению, и все решения различны.

2) Одна из систем имеет 4 различных решения, а другая система не имеют решений.

3) Решения обоих уравнений в каждой из систем совпадают, их 4, и все 4 различны.

4) Одна из систем имеет три решения, а другая – одно.

Исследуем все пункты.

На самом деле знание свойств решений квадратных уравнений необходимо, в частности, для того, чтобы среди 4-х уравнений выбрать то, с которого лучше всего начать исследование.

Посмотрим внимательно на все 4 уравнения. Заметим, что свободный член во второй системе отрицательный (коэффициент при x^2 положительный). И что из этого? То, что каждое уравнение второй системы имеет по два решения!

1) Отсюда сразу следует, что решений задачи в пункте 1) не существует.

2) Что касается второго пункта, то задача сводится к тому, чтобы решения второй системы были различны, а первая не имеет решений, т. е., по крайней мере, дискриминанты уравнений первой системы отрицательны (это условие проверить легче, чем различие 4-х решений второй системы)

$$\begin{cases} D_1=a(9a-4)<0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a<\dfrac{4}{9}, \\ \dfrac{D_2}{4}=4-a^3<0 \Leftrightarrow a>\sqrt[3]{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

3) Уже мы поняли, что каждое уравнение второй системы имеет 2 решения. Попробуем выяснить, когда их решения совпадают. Это можно сделать несколькими способами. Например, так. Обозначим общий корень x_0. Тогда (помним, что у нас $a>0$)

$$\begin{cases} x_0^2+3ax_0+a=0, \\ ax_0^2+4x_0+a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_0^2+3a^2x+a^2=0, \\ ax_0^2+4x+a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+3ax_0+a=0, \\ x\left(3a^2-4\right)=0 \end{cases} \overset{x\neq 0, a>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x\neq 0, a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ x_0=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\frac{2}{\sqrt{3}}}, \end{cases}$$

т. е. совпадают оба корня, и уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} x^2+2\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2+2\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=0, \end{cases}$$

т. е. совпадают.

Что происходит при этом значении a с первой системой?

$$\begin{cases} x^2+3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0, \\ \frac{2}{\sqrt{3}}x^2+4x+\frac{4}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=0 \end{cases}$$

Вот это да! Уравнения первой системы тоже совпали. При этом, например, решения уравнений

$$ax^2+4x+a^2=0 \Leftrightarrow x_{3.4}=\frac{-2\pm\sqrt{4-a^3}}{a}$$

и

$$ax^2+4x-a^2=0 \Leftrightarrow x_{7.8}=\frac{-2\pm\sqrt{4+a^3}}{a}$$

различны, и их 4.

Поэтому $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ – *решение задачи.*

Если даже, быть может, первая система имеет всего два решения и при другом значении a, то при таком a будет 6 решений.

Остался ещё один пункт.

4) Заметим, что у второй системы 3-х решений или одного не может быть – там или 4, или 2 – поэтому ситуация пункта 4) не имеет места.

Ответ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Попробуем подойти к исследованию системы более внимательно.

Второй способ (не только квадратные уравнения)

Так как a входит в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно.

Система (*) при $a=0$ примет вид:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ |xy|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 - \textit{решение одно.}$$

Так как $|xy|=a\geq 0$, то теперь будем рассматривать только $a>0$.

Запишем равносильную совокупность несколько иначе, чем в первом способе:

$$\begin{cases} (ay+ax+4)(x+y+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=a, \\ \frac{a}{x}=-x-3a, \quad (1) \\ \frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a}; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-a, \\ -\frac{a}{x}=-x-3a, \quad (2) \\ -\frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=a, \\ x^2+3ax+a=0, \quad (3) \\ ax^2+4x+a^2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-a, \\ x^2+3ax-a=0, \quad (4) \\ ax^2+4x-a^2=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

(**)

Появилась промежуточная совокупность. Нужна ли она? При стремлении быстрее получить квадратные уравнения школьники (да и в публикациях) не обращают на неё внимания и опускают. А зря!

Видно, что количество решений совокупности (**) определяется количеством решений четырёх квадратных уравнений.

Внимательно посмотрев на системы, заметим, что квадратные уравнения системы (4) совокупности: $x^2+3ax-a=0$ и $ax^2+4x-a^2=0$ – *всегда* имеют по два решения, так как

$$D_3=a(9a+4)>0,\quad \frac{D_4}{4}=4+a^3>0.$$

Отсюда мгновенно делаем вывод, что система имеет, по крайней мере, 4 решения, если все они различны.

А если не различны? А когда не различны? Если у них совпадает один или оба корня.

Из систем (1) и (2) промежуточной совокупности видно, что уравнения $\frac{-a}{x}=-x-3a \Leftrightarrow x^2+3ax-a=0,$

$$\frac{-a}{x}=-x-\frac{4}{a} \Leftrightarrow ax^2+4x-a^2=0$$

и уравнения $\frac{a}{x}=-x-3a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+3ax+a=0, \frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^2+4x+a^2=0$$

совпадают одновременно. Это происходит тогда и только тогда, когда $-x-3a=-x-\frac{4}{a} \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Все четыре корня различны:

$$x_{1,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-a^3}}{2}, x_{2,4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+a^3}}{2}.$$

Итак, *при* $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ *имеем 4 различных корня совокупности.*

Но может совпасть только один корень у второй системы, а у первой все четыре одинаковы, т. е., по крайней мере, оба дискриминанта первой системы равны 0, что невозможно,

так как $\begin{cases} a(9a-4)=0, \\ 4-a^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Вторая система может иметь 4 корня, а первая ни одного –

$$\begin{cases} a(9a-4)<0, \\ 4-a^3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Поэтому, $a=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ **4 решения.**

Ответ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ◄

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (ay+ax+4)(x+y+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases}$$

имеет 7 различных решений.

► **Первый способ** (квадратные уравнения)

Так как a входит в качестве коэффициента при x и y, то случай $a=0$ выделим отдельно.

Система при $a=0$ примет вид:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ |xy|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Так как $|xy| = a \geq 0$, то теперь будем рассматривать только $a > 0$.

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}xy=a,\\ x^2+3ax+a=0, & (1)\\ ax^2+4x+a^2=0;\end{cases} & \\ \begin{cases}xy=-a,\\ x^2+3ax-a=0, & (2)\\ ax^2+4x-a^2=0\end{cases} & \end{array}\right. \quad (**)$$

Видно, что количество решений системы (**) определяется количеством решений четырёх квадратных уравнений.

Внимательно посмотрев на системы, заметим, что квадратные уравнения второй системы совокупности $x^2+3ax-a=0$ и $ax^2+4x-a^2=0$ *всегда* имеют по два решения, так как $D_3 = 9a^4+4a>0$, $\frac{D_4}{4}=4+a^3>0$ (сказать, что это сразу заметит любой школьник, вообще говоря, нельзя, а потому исследование пойдёт сложнее).

Отсюда мгновенно делаем вывод, что система имеет, по крайней мере, 4 решения, если все они различны.

Но система может иметь и 3 решения, если уравнения имеют один общий корень. Когда у них совпадёт один корень?

Корни системы (2):

$$x^2+3ax-a=0 \Leftrightarrow x_{1,3}=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2+4a}}{2},$$

$$ax^2+4x-a^2=0 \Leftrightarrow x_{2,4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+a^3}}{a}$$

Допустим, что совпадут положительные корни: $x_5 = x_7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-3a+\sqrt{9a^2+4a}}{2}-\frac{-2+\sqrt{4+a^3}}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{9a^2+4a}-2\sqrt{4+a^3}=3a^2-4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(3a^2-4\right)\left(3a^2+4\right)}{a\sqrt{9a^2+4a}+2\sqrt{4+a^3}}=3a^2-4 \Leftrightarrow$$

$$\left(3a^2-4\right)\left(a\left(\sqrt{9a^2+4a}-3a\right)+2\sqrt{4+a^3}-4\right)=$$

$$=0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Что при этом происходит с отрицательными корнями?

$$x_6 - x_8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{3}-\sqrt{3+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)-\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)=0.$$

Это значит, что, если совпали положительные корни, то совпадут и отрицательные – система (4) не может иметь 3-х корней: либо 2 при $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, либо 4 при $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Для решения задачи необходимо и достаточно, чтобы система (1) при $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$ имела 3 решения, т. е. чтобы один дискриминант был равен 0, второй положителен, и нет совпадающих корней:

$$\left[\begin{array}{l} a(9a-4)=0\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\frac{4}{9}\neq\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow 4-\left(\frac{4}{9}\right)^3>0\Rightarrow x_1=\frac{-3}{2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{3}, x_{3,4}=-2\pm\sqrt{4-\left(\frac{4}{9}\right)^3} \\ 4-a^3=0\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{4}\neq\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(9\cdot\sqrt[3]{4}-4\right)>0\Rightarrow x_5=\frac{-2}{\sqrt[3]{4}}, x_{7,8}=\frac{-3\sqrt[3]{4}\pm\sqrt{\sqrt[3]{4}\left(9\cdot\sqrt[3]{4}-4\right)}}{2} \end{array}\right.$$

Итак, при $a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$ заданная система имеет ровно 7 корней.

Ответ. $\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$.

Второй способ (квадратные уравнения и прямые)

Запишем равносильную совокупность:

$$\begin{cases}(ay+ax+4)(x+y+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|xy|=a,\\ \left[\begin{array}{l} y=-x-3a,\\ y=-x-\frac{4}{a}\end{array}\right.\end{cases}\quad(1)\Leftrightarrow$$

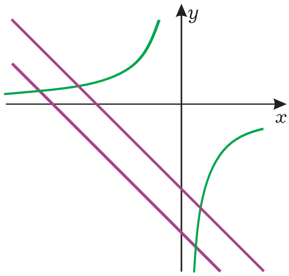
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=a,\\ \frac{a}{x}=-x-3a,\\ \frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a};\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-a,\\ -\frac{a}{x}=-x-3a,\\ -\frac{a}{x}=-x-\frac{4}{a};\end{cases}\end{array}\right.\quad(2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=a,\\ x^2+3ax+a=0\Rightarrow D_1=a(9a-4),\\ ax^2+4x+a^2=0\Rightarrow\frac{D_3}{4}=4-a^3;\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-a,\\ x^2+3ax-a=0\Rightarrow D_2=a(9a+4),\\ ax^2+4x-a^2=0\Rightarrow\frac{D_4}{4}=4+a^3;\end{cases}\end{array}\right.\quad(3)$$

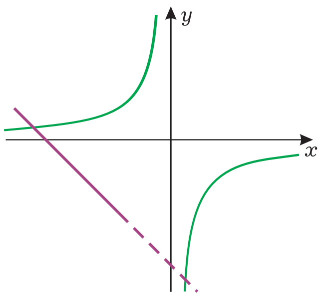
Из совокупности (1) следует, что количество решений заданной системы определяется количеством точек пересечения гипербол $xy=\pm a$ и прямых $y=-x-3a$ и $y=-x-\frac{4}{a}$.

Из второй системы уравнений совокупности (3) видно, что каждая из этих прямых пересекает гиперболу $xy=-a$ два раза, так как $D_2>0$, $D_4>0$. Обе они пересекут эту гиперболу либо в 4-х точках, если они различны, либо в двух, если совпадут – рис. 1–2 (на всех рисунках $y=-x-3a$ – сплошная линия, $y=-x-\frac{4}{a}$ пунктирная).

(Заметим, что, в отличие от первого метода, самые неприятные вычисления при совпадении одного корня уравнений во второй системе совокупности здесь исключены)



$Рис.1.\ a\in\left(-\infty;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$



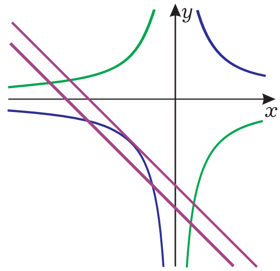
$Рис.2.\ a=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Они совпадут, если $-x-3a=-x-\frac{4}{a}\overset{a>0}{\Leftrightarrow}a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ – этот случай нас не устраивает, так как каждая из систем будет иметь не более двух различных решений.

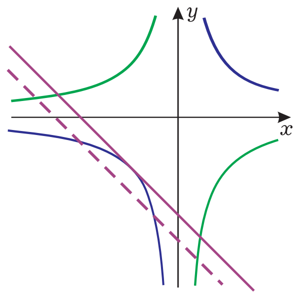
Для решения задачи необходимо и достаточно, чтобы первая система совокупности (3) при $a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}$ имела 3 решения, т. е. чтобы один дискриминант был равен 0, второй положителен, а корни разные (рис. 3, 3а, 3б):

$$\left[\begin{array}{l} a(9a-4)=0\overset{a>0}{\Leftrightarrow}a=\frac{4}{9}\neq\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow 4-\left(\frac{4}{9}\right)^3>0, \\ 4-a^3=0\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{4}\neq\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt[3]{4}\left(9\cdot\sqrt[3]{4}-4\right)>0 \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

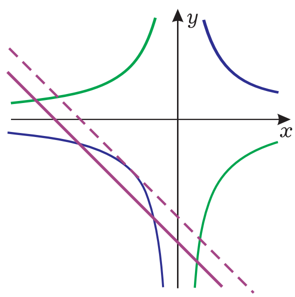
$$\Leftrightarrow a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}\subset\left(-\infty;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$$



$Рис.3.\ a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$



$Рис.3а.\ a=\frac{4}{9}$



$Рис.3б.\ a=\sqrt[3]{4}$

Итак, при $a\in\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$ заданная система имеет 7 корней.

Ответ. $\left\{\frac{4}{9};\sqrt[3]{4}\right\}$.◄

Проверь себя

1. Найти значение произведения $0{,}3(8)\cdot 0{,}5(45)$ в виде простой дроби.

2. Установить без калькулятора, что больше: $2\cdot\sqrt{2019}$ или $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}$?

3. Известно, что $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\sqrt{5}$. Найти $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

4. Определить знак выражения $\sin 2\cdot\cos 3\cdot\sin 5$.

5. Вычислить без калькулятора $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

6. Доказать, что число $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)$ целое, и найти его.

7. Найти площадь треугольника со сторонами $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$.

8. Верно ли равенство $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, если $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и равны высоты треугольников BH и B_1H_1 ?

9. Существует ли треугольник, наименьшая сторона которого больше 100 м, а наибольшая высота меньше 1 см.

Ответы и решения (см. в №11)

Статью подготовила Пиголкина Татьяна Сергеевна
Доцент МФТИ, заслуженный работник высшей школы.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Общеобразовательное значение курса математики, как и любого другого предмета, состоит прежде всего в тех общих понятиях, которые он даёт и которые расширяют кругозор и способы подхода человека к явлениям жизни. С этой точки зрения математика важна, во-первых, своей логикой, последовательностью и точностью выводов. Во-вторых, математика полезна тем, что она трудна. Её абстрактные строгие рассуждения требуют больших и длительных умственных усилий, требуют не столько памяти, сколько понимания и соображения.

А.Д. Александров