Крат Степан Андреевич
Студент II курса Высшего физического колледжа РАН Московского инженерно-физического института (государственного университета).

«Обобщённая» задача о шести спичках

Среди занимательных задач со спичками широко известна такая: можно ли из шести спичек собрать четыре равных треугольника? Попытка собрать на столе (плоскости)

не приводит к успеху, если же догадаться рассмотреть пространственную фигуру, то решение легко находится: это правильная треугольная пирамида (правильный тетраэдр), а 4 грани – правильные треугольники (рис. 1). Как видно, решение этой несложной задачи зависит от размерности пространства.

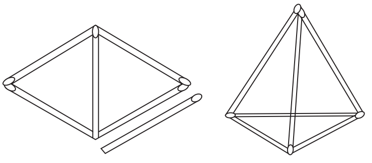

Рис. 1

В решении обобщённой задачи, рассмотренной ниже, потребуется оперировать многомерными пространствами. Напомним о том, что это такое. Размерностью пространства называется минимальное количество координат, которые необходимо знать, чтобы точно определить положение точки в этом пространстве. В школе изучаются только три типа пространств: одномерное (прямая), двумерное (плоскость) и трёхмерное (пространство). Математика свободно обращается с пространствами любой конечной размерности. В таких многомерных пространствах расстояние между двумя точками

$A(x_1; x_2; ...; x_n)$ и $B(y_1; y_2; ...; y_n)$

определяется как

$$AB = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

где n – размерность пространства. Частные случаи этой формулы для плоскости и пространства Вам, конечно, известны.

Обобщённой задачей о спичках назовём такую задачу: какое наибольшее число правильных равных между собой треугольников можно собрать из X равных отрезков («спичек») в пространствах различной размерности?

Чтобы подойти к решению обобщённой задачи, сначала решим задачу вспомогательную. Пусть есть n точек. Сколько можно получить равносторонних равных между собой треугольников таких, чтобы эти точки были их вершинами? Совершенно ясно, что максимальное число треугольников будет получено в том случае, если *все* точки равноудалены друг от друга. На плоскости – это случай трёх точек – вершин правильного треугольника (рис. 2), в пространстве – четыре точки – вершины правильного тетраэдра (рис. 3).

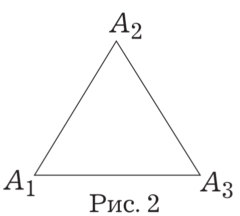

Рис. 2

Пять точек на равном друг от друга расстоянии можно разместить уже только в 4-хмерном пространстве, в 3-хмерном – нельзя. Это можно доказать следующим образом. Пусть есть четыре точки, равноудалённые друг от друга (они, как показано выше, находятся в вершинах правильного тетраэдра). Добавим к ним пятую точку. Она должна быть равноудалена от них всех. Но единственная точка в пространстве, равноудалённая от вершин правильного тетраэдра, – это его центр, расстояние от которого до вершин тетраэдра меньше длины ребра этого тетраэдра. Значит, в трёхмерном пространстве нельзя разместить пять точек на равном расстоянии друг от друга.

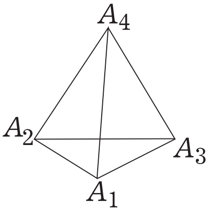

Рис. 3

В 4-хмерном пространстве эти 5 точек найдутся, например, точки с координатами:

$$A_1(0;\ 0;\ 0;\ 0),\ A_2(1;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$A_3\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0;\ 0\right),\ A_4\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\sqrt{3}};\ \sqrt{\frac{2}{3}};\ 0\right),$$

$$A_5\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\sqrt{3}};\ \frac{1}{2\sqrt{6}};\ \sqrt{\frac{5}{8}}\right).$$

Легко проверить, что длина каждого отрезка

$$|A_k A_j| = 1\ (k \neq j),\ \ k,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Можно показать, что в n-мерном пространстве на равном расстоянии друг от друга можно разместить не более $n+1$ точки.

Итак, рассматриваем n точек, равноудалённых друг от друга в пространстве размерности не менее $n-1$. Но сколько получится треугольников? Из n точек мы всеми возможными способами выбираем наборы по три точки. При этом нам не важно, в каком порядке они идут, ведь точки $A_1A_2A_3$ и точки $A_2A_1A_3$ определяют один треугольник, поэтому количество треугольников равно:

$$C = C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} \quad (1)$$

(это количество выборок из n элементов по 3 без учёта порядка).

Сколько отрезков («спичек») соединяют все n точек, задавая указанное выше количество треугольников? Рассмотрим поэтапно. Первую

точку надо соединить с $n-1$ другими, на что, совершенно ясно, пойдёт $n-1$ отрезок. Вторую потребуется соединить уже с $n-2$ точками. Значит, всего потребуется отрезков

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n\cdot(n-1)}{2}. \quad (2)$$

Для случая с тремя и четырьмя точками это легко можно проверить по приведённым рисункам.

Для перехода от вспомогательной задачи к основной проблеме выразим C через X. Для этого сначала заметим, что

$$C = \frac{X\cdot(n-2)}{3}. \quad (3)$$

Выразим n через X из квадратного уравнения (2): $n^2 - n - 2X = 0$. Так как $n \geq 1$, то

$$n = \frac{1+\sqrt{1+8\cdot X}}{2}. \quad (4)$$

Подставляя n в уравнение (3), получим

$$C = \frac{X\cdot(\sqrt{1+8\cdot X}-3)}{6}. \quad (5)$$

Итак, если число «спичек» X таково, что число n в соотношении (4) целое, то количество треугольников определяется по формуле (5). Можно обобщить формулу (5) на любое количество «спичек», но с ограничением на размерность пространства.

Выберем максимальное натуральное число k такое, что

$$\frac{k(k-1)}{2} \leq X. \quad (6)$$

Если k таково, что имеет место равенство в (6), то попадаем в уже рассмотренный случай (1) – (2).

Если же $\frac{k(k-1)}{2} < X$, то размерность пространства считаем не менее $k-1$. Из $Y = \frac{k(k-1)}{2}$ «спичек» сложим «гипертетраэдр» (фигура названа по аналогии с гиперсферой, её примером на плоскости является правильный треугольник, в пространстве – тетраэдр). Количество треугольников, полученных при этом, можно вычислить по формуле (5):

$$C_1 = \frac{Y(\sqrt{1+8Y}-3)}{6} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}. \quad (7)$$

Из оставшихся $X - \frac{k(k-1)}{2} = m$ «спичек» будем по одной пристраивать к гипертетраэдру: две «спички» добавят новый треугольник, три добавят ещё 2, четыре – ещё 3 и т.д. Всего m «спичек» могут добавить треугольников

$$C_2=\sum_{i=1}^{m-1} i=\frac{m(m-1)}{2}. \qquad (8)$$

Объединив формулы (7) и (8), получим финальную:

$$C=C_1+C_2=\frac{k(k-1)(k-2)}{2}+$$
$$+\frac{(2X-k(k-1))(2X-k(k-1)-2)}{8} \qquad (9)$$

для X «спичек» в пространстве размерности не менее $k-1$. Если это не так, то задача сильно усложняется и требует рассмотрения каждой размерности отдельно, от двух до $k-2$. Для размерностей 2, 3, 4 составлена таблица 1, показывающая максимальное количество треугольников для числа «спичек» $X \le 10$.

Таблица 1

размерность \ число «спичек»	3	4	5	6	7	8	9	10
2 (плоскость)	1	1	2	2	3	3	4	4
3 (пространство)	1	1	2	4	4	5	7	7
4	1	1	2	4	4	5	7	10

По формуле (9) построен график зависимости максимального количества треугольников C из X «спичек» в пространствах размерности не менее $k-1$, где k определяется формулой (6). Точки соединены линией, что подчёркивает определённую закономерность: угол в точках P_2, P_3, P_4, P_5 образуется, когда в формуле (6) имеет место равенство (k соответственно равно 2, 3, 4 и 5).

Интересен тот факт, что количество треугольников, которые можно собрать из «спичек», растёт быстрее, чем количество «спичек». Это можно видеть по графику (рис. 4), на котором заметно, что уже из 10 «спичек» можно собрать 10 треугольников (в пространстве размерности ≥ 4), а из 15-ти «спичек» получится целых 20 треугольников (в пространствах размерности ≥ 5).

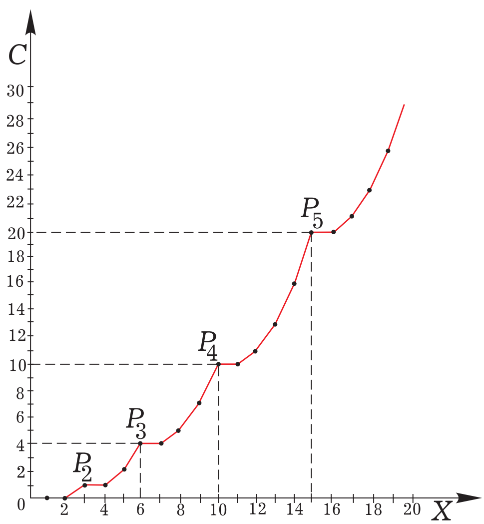

Рис. 4

Рис. 4. График зависимости количества треугольников C из X спичек в пространстве соответствующей размерности

Помощь в написании статьи оказана Т.С. Пиголкиной.