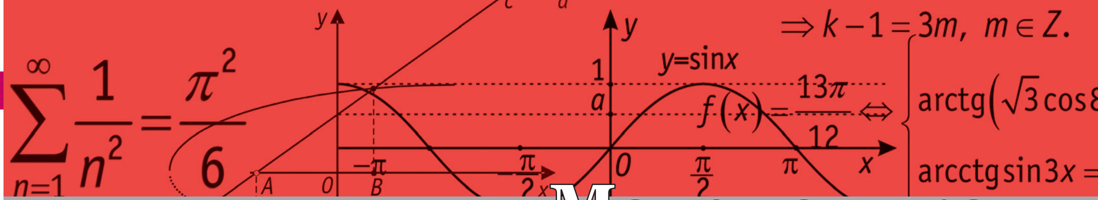

Мычка Евгений Юрьевич
Кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ.
Выпускник СУНЦ МГУ 2002 года.

5 задач на доказательство параллельности прямых

В статье даны формулировки пяти задач, решения которых основаны на использовании одной теоремы, приводится доказательство соответствующей теоремы.

Начнём с условий задач, о которых говорится в названии статьи. Их решения будут далее получены с помощью одной и той же теоремы, но читателю полезно перед ознакомлением с её доказательством самостоятельно решить одну или несколько предложенных задач.

Задача 1.

Рассмотрим на прямой ℓ три точки p, x, q (рис. 1), причем точка x является серединой отрезка $[pq]$, а на окружности C, проходящей через точки p и q, отметим точку O. Пусть

а) прямая Ox пересекает окружность в точке X;

б) касательные, восстановленные к окружности в точках p и q, пересекаются в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X'.

Тогда прямая OX' параллельна прямой ℓ.

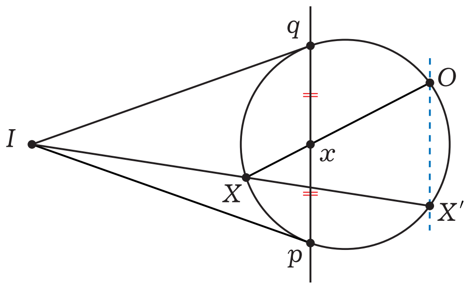

Рис. 1

Задача 2.

Рассмотрим на прямой ℓ (рис. 2) три точки p, x, q, причем точка x является серединой отрезка $[pq]$, а на окружности C, проходящей через точки x и q, – точку O. Пусть а) прямая Op пересекает окружность в точке P;

б) касательные, восстановленные к окружности в точках P и q, пересекаются в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X'.

Тогда прямая OX' параллельна прямой ℓ.

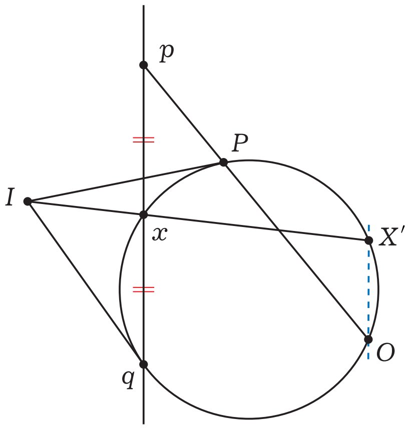

Рис. 2

Задача 3.

Рассмотрим на прямой ℓ три точки p, x, q (рис. 3), причём точка x является серединой отрезка $[pq]$, а на окружности C, касающейся прямой ℓ в точке q, – точку O. Пусть

а) прямые Op и Ox пересекают окружность в точках P и X;

б) касательная, восстановленная к окружности в точке P, пересекает прямую ℓ в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X'.

Тогда прямая OX' параллельна прямой ℓ.

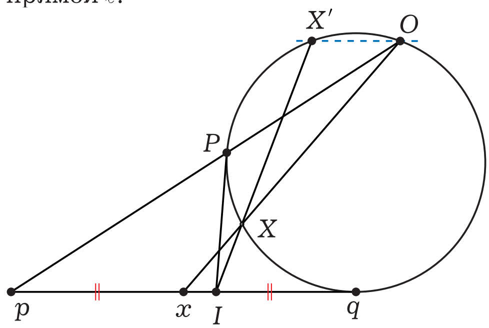

Рис. 3

Задача 4.

Рассмотрим на прямой ℓ три точки p, x, q (рис. 4), причем точка x – середина отрезка $[pq]$, а на окружности C, касающейся прямой ℓ в точке x, – точку O. Пусть

а) прямые Op и Oq пересекают окружность в точках P и Q;

б) касательные, восстановленные к окружности в точках P и Q, пересекаются в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X'.

Тогда прямая OX' параллельна прямой ℓ.

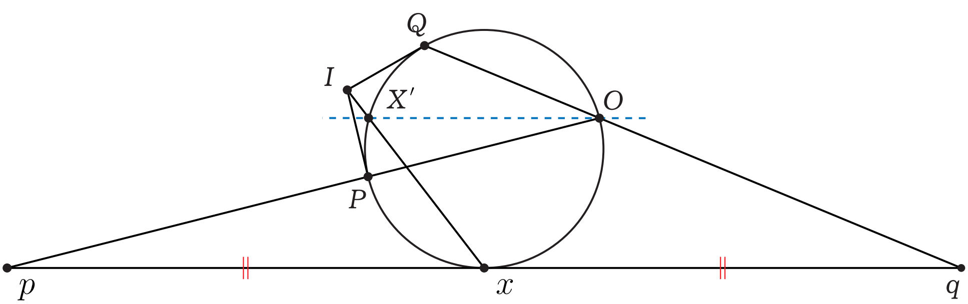

Рис. 4

Задача 5.

Рассмотрим на прямой ℓ три точки p, x, q (рис. 5), причем точка x является серединой отрезка $[pq]$, а на окружности C – точку O. Пусть

а) прямые Op, Ox, Oq пересекают окружность в точках P, X, Q;

б) касательные, восстановленные к окружности в точках P и Q, пересекаются в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X'.

Тогда прямая OX' параллельна прямой ℓ.

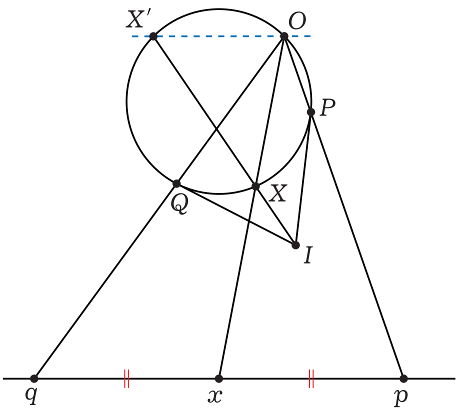

Рис. 5

Перейдём к вышеупомянутой теореме. Для её доказательства понадобятся некоторые геометрические понятия и связанные с ними леммы.

Если на прямой ℓ есть три точки a, b, c, то отношением $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}$ векторов $\overrightarrow{ac}$ и $\overrightarrow{bc}$ называется такое число λ, при котором $\overrightarrow{ac}=\lambda\overrightarrow{bc}$. Например, если даны три точки с координатами $a(1)$, $b(2)$, $c(3)$, то $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}=2$; а если даны три точки с координатами $a(1)$, $b(3)$, $c(2)$, то $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}=-1$.

Рассмотрим на прямой ℓ четыре точки a, b, c, d. Двойным отношением четырёх точек a, b, c, d называется число $(a,b;c,d)$, равное

$$(a,b;c,d)=\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}:\frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}$$

Замечание 1. Докажем, что

$$(a,b;c,d)=\frac{1}{(a,b;d,c)}$$

Доказательство.

$$(a,b;c,d)(a,b;d,c)=\left(\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}:\frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}\right)\left(\frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}:\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}\right)=1.$$

Замечание 2. Докажем, что если $(a,b;c,d)=1$, то либо $a=b$, либо $c=d$.

Доказательство. Из равенства $(a,b;c,d)=1$ следует, что $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}:\frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}=\lambda$ при некотором λ. Из равенств $\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}=\lambda$ и $\frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}=\lambda$ выводятся равенства: $\lambda\overrightarrow{ab}=(\lambda-1)\overrightarrow{ac}$ и $\lambda\overrightarrow{ab}=(\lambda-1)\overrightarrow{ad}$. Теперь видно, что если $\lambda=1$, то $\overrightarrow{ab}=0$, т.е. $a=b$. Если же $\lambda\neq 1$, то $\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{ad}$, т.е. $c=d$.

Теперь, наравне с прямой ℓ, рассмотрим окружность C (рис. 6). Выберем на ней точку O и определим отображение $f_0:\ell\to C$ – каждой точке $x\in\ell$ поставим в соответствие точку $X\in C$, являющуюся пересечением прямой (xO) и окружности C.

Проведём через точку O прямую, параллельную прямой ℓ, и точку ее пересечения с окружностью C обозначим Ω. Пополним прямую ℓ новым элементом, который обозначим ω и назовем *бесконечно удаленной точкой*. Множество $\overline{\ell}=\ell\cup\omega$ назовем

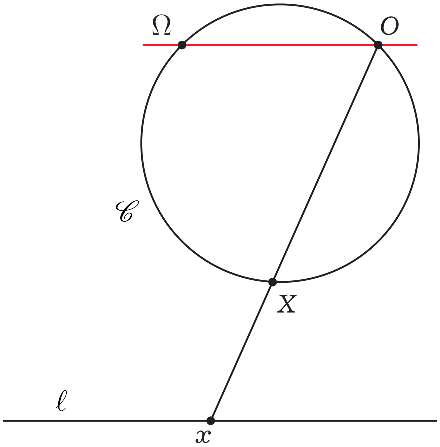

Рис. 6

пополненной прямой. Введение бесконечно удаленной точки ω делается, в частности, для удобства, чтобы формулировки теорем и лемм «работали» и в вырожденных случаях, когда прямые становятся параллельными.

Распространим двойное отношение четырех точек и на пополненную прямую. При этом договоримся, что если в числителе и знаменателе возникнут отрезки с концами в точке ω (а они будут возникать непременно парами), то мы их будем просто сокращать.

Определим отображение $\bar{f}_0 : \bar{\ell} \to C$ – если $x \in \ell$, то $\bar{f}_0(x) = f_0(x)$, а если $x = \omega$, то $\bar{f}_0(\omega) = \Omega$.

Отображение $\bar{f}_0 : \bar{\ell} \to C$ является взаимно однозначным. Это позволяет перенести понятие направленных отрезков с прямой ℓ на окружность C.

Лемма 1. Для любых четырех точек a, b, c, d пополненной прямой $\bar{\ell}$ выполняется равенство:

$$(a,b;c,d) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Доказательство. Обозначим радиус окружности R. Требуемое соотношение следует из цепочки равенств, в которой мы применяем формулу площади треугольника и теорему синусов:

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}} : \frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}} =$$

$$= \frac{aO \cdot Oc \cdot \sin \overrightarrow{\angle} aOc}{bO \cdot Oc \cdot \sin \overrightarrow{\angle} bOc} : \frac{aO \cdot Od \cdot \sin \overrightarrow{\angle} aOd}{bO \cdot Od \cdot \sin \overrightarrow{\angle} bOd} =$$

$$= \frac{2R \cdot \sin \overrightarrow{\angle} aOc}{2R \cdot \sin \overrightarrow{\angle} bOc} : \frac{2R \cdot \sin \overrightarrow{\angle} aOd}{2R \cdot \sin \overrightarrow{\angle} bOd} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Пополненную прямую и окружность мы можем воспринимать как разные модели одного и того же объекта, который называется *проективной прямой.* С помощью отображения $\bar{f}_0$ мы, образно говоря, меняем свою точку зрения на проективную прямую с $\bar{\ell}$ на C.

Теперь займёмся преобразованиями проективной прямой (в модели окружности C). Выберем на плоскости точку I (рис. 7), находящуюся снаружи окружности C, и определим преобразование $g_I : C \to C$ следующим образом: каждой точке $X \in C$ поставим в соответствие точку X', являющуюся пересечением прямой (XI) и окружности C.

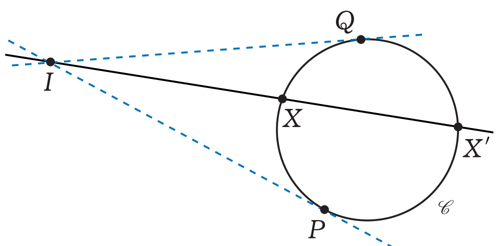

Рис. 7

В силу того, что точка I берётся снаружи окружности, из неё всегда можно провести две касательные: IP и IQ. Для точек P и Q характерно такое свойство: $g_I(P)=P$ и $g_I(Q)=Q$. Подобные точки называются *неподвижными точками* преобразования g_I. Преобразование g_I, следовательно, всегда имеет две неподвижные точки.

Лемма 2. Преобразование g_I сохраняет двойное отношение, т.е. для любых четырёх точек A, B, C, D окружности C выполняется равенство:

$$(A, B; C, D)=(A', B'; C', D').$$

Доказательство. Требуемое равенство следует из следующей цепочки равенств, в которой мы применяем подобие треугольников:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}\cdot IC}{IA'}\cdot\frac{IB'}{\overrightarrow{B'C'}\cdot IC}:\frac{\overrightarrow{A'D'}\cdot ID}{IA'}\cdot\frac{IB'}{\overrightarrow{B'D'}\cdot ID}=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}}:\frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}}$$

Лемма 3. Пусть P и Q являются неподвижными точками преобразования g_I. Тогда для каждой точки $X\in C$, отличной от P и Q, выполняется равенство:

$$(P, Q; X, X') = -1$$

Доказательство. Из леммы 2 и замечания 1 следует, что

$$(P, Q; X, X')=(P, Q; X', X)=\frac{1}{(P, Q; X, X')}$$

Таким образом, $(P, Q; X, X')^2=1$.

Случай $(P, Q; X, X') = 1$ невозможен в силу замечания 2, так как $P \neq Q$ и $X \neq X'$. Следовательно, $(P, Q; X, X') = -1$.

Замечание 3. Если точка x является серединой отрезка $[pq]$, а точка x' такова, что $(p, q; x, x') = -1$, то $x' = \omega$.

Доказательство. Из равенств $(p, q; x, x')= - 1$ и $\frac{\overrightarrow{px}}{\overrightarrow{qx}}=-1$ следует, что $\frac{\overrightarrow{px'}}{\overrightarrow{qx'}}=1$. Ни одна точка прямой ℓ не может удовлетворять этому равенству, следовательно, $x' = \omega$.

Замечание 4. Если $(p, q; x, \omega)= -1$, то точка x является серединой отрезка $[pq]$.

Доказательство. Из равенства $(p, q; x, \omega)= -1$ следует, что $\frac{\overrightarrow{px}}{\overrightarrow{qx}}=-1$, т.е. $\overrightarrow{px}=\overrightarrow{xq}$. Это и означает, что точка x является серединой отрезка $[pq]$.

Теперь можно сформулировать и доказать обещанную теорему.

Теорема. На прямой ℓ расположены точки p, x, q, а на окружности C – точка O (рис. 8). Пусть

а) прямые Op, Ox, Oq пересекают окружность в точках P, X, Q;

б) касательные, восстановленные к окружности в точках P и Q, пересекаются в точке I;

в) прямая IX пересекает окружность в точке X';

г) прямая OX' пересекает прямую ℓ в точке x'.

Тогда $(p, q; x, x')=-1$.

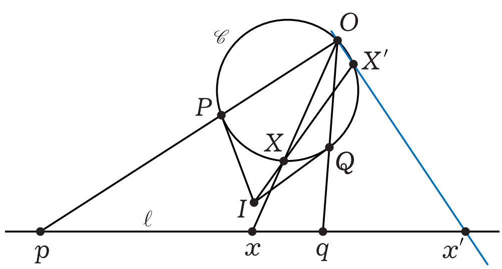

Рис. 8

Доказательство. Рассмотрим отображение $\overline{f}_0 : \overline{\ell} \to C$ и преобразование $g_I : C \to C$. Из построения точки I следует, что P и Q являются неподвижными точками преобразования g_I, поэтому в силу леммы 3 имеет место равенство $(P, Q; X, X') = -1$. Из леммы 1 следует, что $(p, q; x, x') = (P, Q; X, X')$.

Следовательно, $(p, q; x, x') = -1$.

Решение задач

Теперь прокомментируем каждую задачу и дадим общее для них всех решение.

В задаче 1 приводится случай теоремы, когда совпадают пары точек p, P и q, Q. Это означает, что прямая ℓ пересекает окружность C по точкам p и q.

В задаче 2 рассматривается случай теоремы, когда совпадают пары точек x, X и q, Q. Это означает, что прямая ℓ пересекает окружность C по точкам x и q.

В задаче 3 приводится случай теоремы, при котором касательная, восстановленная к окружности C в точке Q, совпадает с прямой ℓ.

В задаче 4 рассматривается случай теоремы, когда точки x и X совпадают. Это означает, что прямая ℓ и окружность C пересекаются по точке x.

В задаче 5 приводится случай теоремы, когда точка x является серединой отрезка $[pq]$.

Общее решение. Обозначим x' такую точку прямой ℓ, что $\overline{f}_0(x') = X'$. Из теоремы следует, что $(p, q; x, x') = -1$. Из замечания 3 следует, что $x' = \omega$. Следовательно, $X' = \Omega$, что и означает, что прямая OX' параллельна прямой ℓ.

В заключение, приведём ещё две задачи, для решения которых мы также воспользуемся теоремой. Следующую задачу традиционно связывают с именем великого древнегреческого ученого Архимеда (287 – 212 до н.э.).

1. Рассмотрим полуокружность, построенную на диаметре OQ (рис. 9). Из точки Q восстановим одну касательную, другую восстановим из некоторой точки p. Ортогональную проекцию точки p на диаметр OQ обозначим q. Пусть касательные пересекаются в точке I. Тогда прямая OI поделит отрезок $[pq]$ пополам. Докажем это.

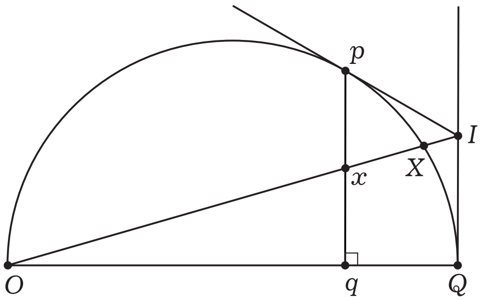

Рис. 9

Обозначим x точку пересечения прямой (OI) и отрезка $[pq]$. Касательная к полуокружности, восстановленная в точке O, параллельна прямой (pq). Следовательно, $\Omega = O$. Применяя это, а также леммы 1, 2, 3, получаем, что

$$(p, q; x, \omega) = (P, Q; X, \Omega) = (P, Q; X, O) = -1.$$

Теперь из замечания 4 следует, что точка x является серединой отрезка $[pq]$.

2. Через точку O пересечения двух окружностей (рис. 10) провели три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, так, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности, а точки A_2, B_2, C_2 – на другой. Из точек A_1, C_1 провели касательные к первой окружности и получили точку I_1, а из точек A_2, C_2 провели касательные ко второй окружности и получили точку I_2. Прямая I_1B_1 пересекла первую окружность во второй раз в точке B_1', а прямая I_2B_2 пересекла вторую окружность во второй раз в точке B_2'. Докажите, что точки B_1', O, B_2' лежат на одной прямой.

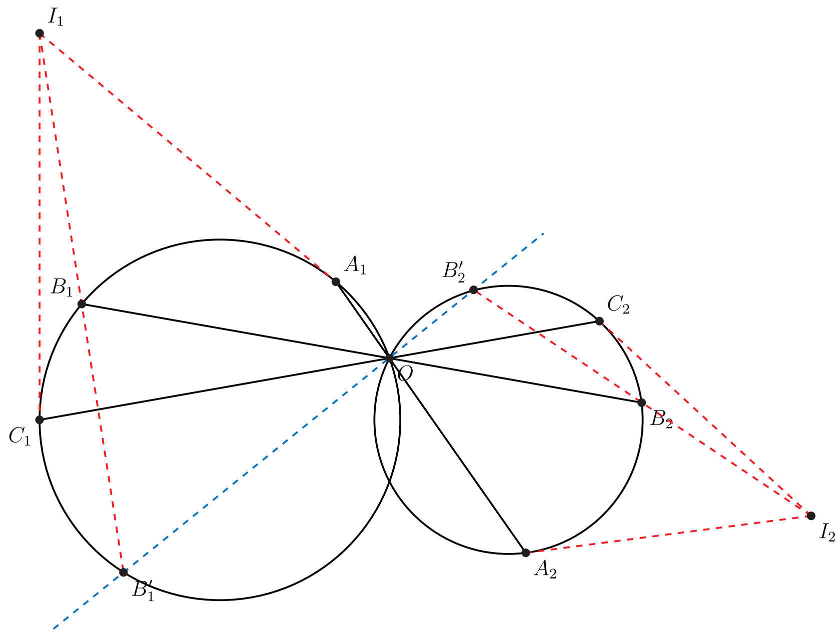

Рис. 10

Проведём прямую ℓ и рассмотрим отображения $\overline{f_0}:\overline{\ell}\to C_1$ и $\overline{f_0}:\overline{\ell}\to C_2$. Из теоремы следует, что $\overline{f_0}^{-1}(B_1')=\overline{f_0}^{-1}(B_2')$. Это равенство и означает, что точки B_1', O, B_2' лежат на одной прямой.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Черви-сверхдолгожители помогли ученым найти препараты от старости среди аптечных лекарств

Исследователи из стартапа Gero, Сколтеха, МФТИ и Университета медицинских наук Арканзаса нашли способ повторно использовать большие данные о работе генов червей и выяснили, что старение нематод — это частично запрограммированный процесс, в который можно вмешаться с помощью лекарств из аптеки.

Ученые сравнили, как работают гены обычных червей и червей-долгожителей в течение жизни. Для этого они поставили эксперимент, в котором нематодам радикально продлевали жизнь с помощью различных генетических манипуляций.

https://mipt.ru/news/chervi_sverkhdolgozhiteli_pomogli_uchenym_nayti_preparaty_ot_starosti_sredi_aptechnykh_lekarstv