Ожерельев Дмитрий Валерьевич
Учитель математики высшей категории Частного учреждения Центр образования «Европейская гимназия» г. Москвы, кандидат педагогических наук.

Пять частных предельных случаев обобщённой задачи Аполлония

В данной статье рассматривается решение пяти частных случаев задачи о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей, названной в честь великого геометра античности *Аполлония Пергского*. Все решения основаны на «школьной» математике; надеемся, что после прочтения статьи читатель будет уделять особое внимание этапу исследования при решении задач на построение циркулем и линейкой.

Задача Аполлония состоит в том, чтобы с помощью циркуля и линейки построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей. Существует легенда, что данная задача впервые была сформулирована *Аполлонием Пергским* (*Apollonios Pergbios*) (III в. до н. э.) в своём трактате «О касании». Однако, как и большинство сочинений Аполлония, до наших дней эта работа не дошла, и решение задачи было восстановлено в 1600 г. французским математиком *Франсуа Виетом*.

Итак, задача формулируется просто: даны три окружности, постройте четвёртую, которая касалась бы трёх данных окружностей. Сама задача решается методом *инверсии*, однако данный метод построения на плоскости не изучается в школе. Но если мы рассмотрим задачу Аполлония в предельных случаях, когда данные окружности могут вырождаться в окружности «нулевого» радиуса, то есть точки, или окружности бесконечного радиуса, то есть прямые, то практически все «частные случаи» задачи возможно решить «школьными» методами.

Заметим, что в такой формулировке задача Аполлония имеет десять различных комбинаций исходных фигур. Однако в этой статье мы остановимся на решении только лишь пяти, на наш взгляд,

наиболее интересных случаев. Первый случай – три окружности являются окружностями «нулевого» радиуса, то есть точками; второй – когда исходные окружности вырождаются в три прямые. Третий случай – когда даны две точки и прямая; четвёртый – когда даны две точки и окружность; и, наконец, пятая задача, когда набор данных фигур состоит из точки, прямой и окружности.

Напомним, что любая задача на построение подразумевает в своём решении четыре этапа: анализ, построение, доказательство верности построения и исследование.

При решении поставленной задачи мы опустим такой этап решения, как анализ, и уделим особое внимание трём оставшимся. Особенно внимательно мы остановимся на последнем этапе – исследовании – и постараемся ответить на вопрос, при каком исходном расположении данных фигур задача не имеет решение, а если имеет, то сколько различных решений существует в каждом конкретном случае.

Заметим, что построение окружности с помощью линейки и циркуля означает нахождение её центра и радиуса.

Задача 1. Построить окружность, проходящую через три данные точки (рис. 1).

Эта задача полностью решена в школьном учебнике геометрии. Доказана теорема: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и только одну; центр окружности есть точка пересечения серединных[1] перпендикуляров к сторонам треугольника, образованных этими тремя точками.

Задача 2. Построить окружность, касающуюся трёх данных прямых. Пусть даны три прямые l, m и n.

Построение.

1) Построим точки пересечения данных прямых, определим точку A как точку пересечения прямых l и m, $B = m \cap n$, а $C = n \cap l$ (полагаем, что это возможно, тогда имеем ΔABC).

2) Построим биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle BCA$. Обозначим точку пересечения буквой O.

3) Из точки O опустим на прямую $l(AC)$ перпендикуляр OD, где $D \in AC$.

4) Построим окружность с центром в точке O и радиусом OD.

Построенная окружность является искомой.

Доказательство. В этом случае повторяет доказательство теоремы о вписанной в треугольник окружности.

[1] Серединный перпендикуляр является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, к которому он построен.

Исследование. Уже первый пункт построения выполним не всегда. Невозможно построить точку пересечения двух прямых, когда эти прямые параллельны. Параллельными могут быть две прямые или все три. Если две прямые, например m и n, параллельны, а третья прямая – l – пересекает их, то, как нетрудно заметить, при таком расположении прямых задача будет иметь два различных решения (см. рис. 2).

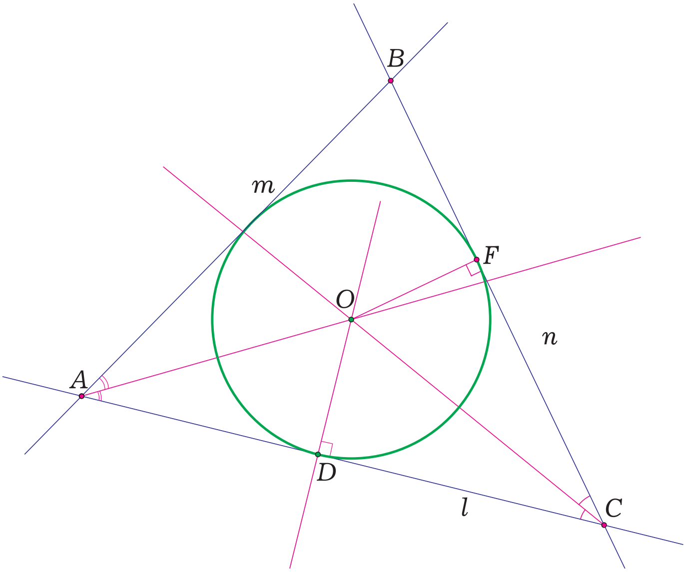

Рис. 1

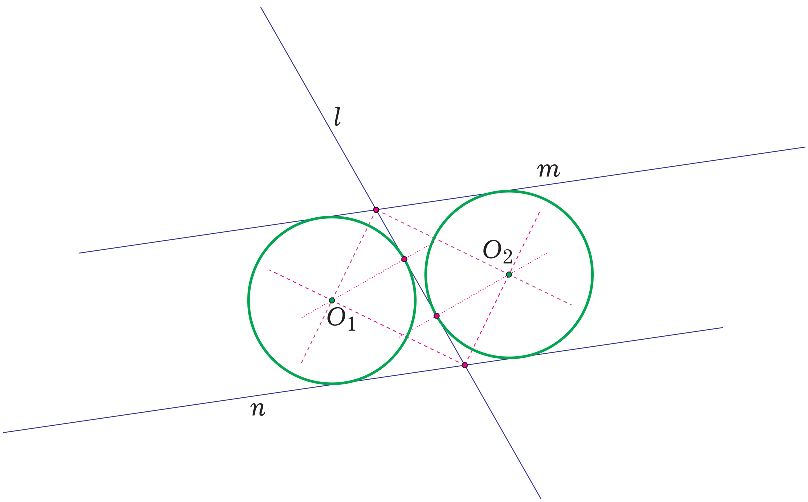

Рис. 2

Если же все три прямые будут параллельны между собой, то задача не будет иметь решения.

Также в первом пункте нашего решения мы подразумевали, что три данные прямые пересекаются в разных точках, образуя треугольник, однако три прямые могут пересекаться в одной точке. Тогда задача не будет иметь решения – мы не сможем построить окружность, касающуюся трёх таких прямых.

Исследуя возможность выполнения пункта 2 изложенного выше построения, заметим, что две пересекающиеся прямые образуют две пары равных углов. А значит, и построение биссектрисы неоднозначно. В случае, когда три прямые попарно пересекаются в трёх точках, возможны четыре решения: в одном случае окружность внутри образовавшегося треугольника, а в трёх других случаях окружности расположены вне треугольника (см. рисунок 3). Эти окружности называются вневписанными для треугольника ABC.

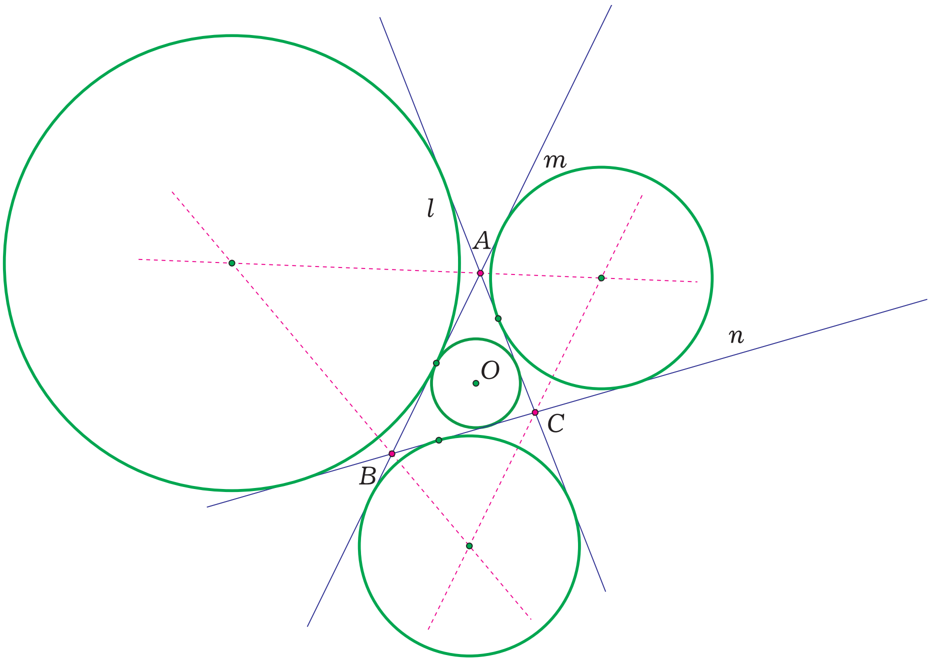

Рис. 3

Таким образом, данная задача может иметь четыре различных решения, два или ни одного.

Прежде чем рассмотреть решение третьей задачи, напомним, как можно построить с помощью циркуля и линейки отрезок, равный среднему геометрическому[1] двух других отрезков.

Итак, даны отрезки a и b. Построить отрезок x такой, что $x=\sqrt{a\cdot b}$.

[1] Среднее геометрическое двух чисел (в нашем случае двух отрезков) также называется средним пропорциональным.

Построение.

1) Отложим данные отрезки от точки A на некоторой прямой в одном направлении (на рис. 4 один отрезок AB, другой – AC).

2) Построим точку O – середину отрезка AC и на отрезке AC как на диаметре построим окружность.

3) Восстановим перпендикуляр к прямой AC в точке B до пересечения в точке D с окружностью.

4) Отрезок AD – искомый.

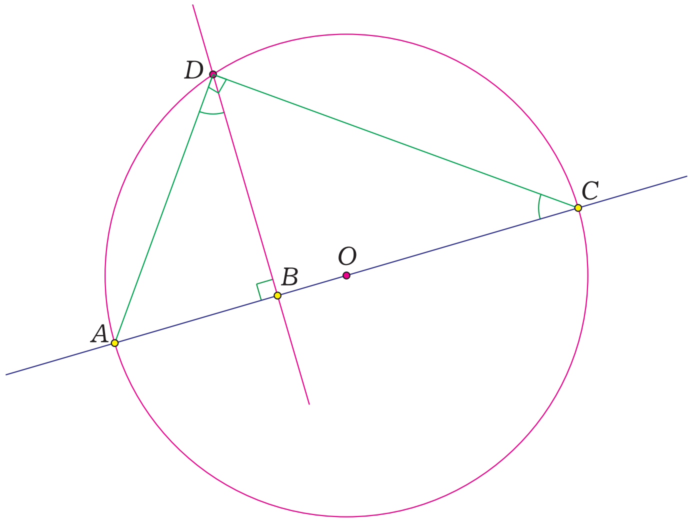

Рис. 4

Доказательство. Угол ADC – прямой, опирается на диаметр. DB – высота треугольника ADC, проведённая из вершины прямого угла. Нетрудно заметить, что треугольники ADC и ABD подобны (имеют общий угол при вершине A). Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AC}{DA}=\frac{AD}{BA}, \text{ или } AD=\sqrt{AC\cdot AB}.$$

Решаем задачу 3.

Задача 3. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Обозначим данные фигуры: точки буквами – A и B, а прямую – буквой l (рис. 5).

Построение.

1) Построим прямую AB.

2) Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB. Обозначим его d.

3) Обозначим точку пересечения прямой AB и прямой l буквой D.

4) Построим точку E такую, что $E\in l$, $DE=\sqrt{AD\cdot BD}$.

5) Построим окружность, проходящую через точки B, A и E.

6) Построенная окружность является искомой (см. рис. 5).

Доказательство. Построенная окружность проходит через точки A и B по построению (пункт 5). Докажем, что прямая l касается построенной окружности. По построению точка E лежит на окружности, отрезок DE равен $\sqrt{AD\cdot BD}$, а это означает, что $DE^2=AD\cdot BD$. Тогда $\frac{DE}{BD}=\frac{AD}{DE}$ и $\Delta DBE\sim\Delta DEA$ (угол D –

общий), откуда следует $\angle BED = \angle BAE$, т. е. ED – касательная.

Исследование. Первые три пункта построения всегда выполнимы единственным образом. Вот пункт 4 предложенного построения не всегда выполним единственным образом, точку E можно определить двумя способами, если окружность пересекается с прямой l в двух точках, одним способом (в случае касания) и таких точек может не быть. И, опять же, пункт 5 может быть выполним не всегда, а если выполним, то единственным образом.

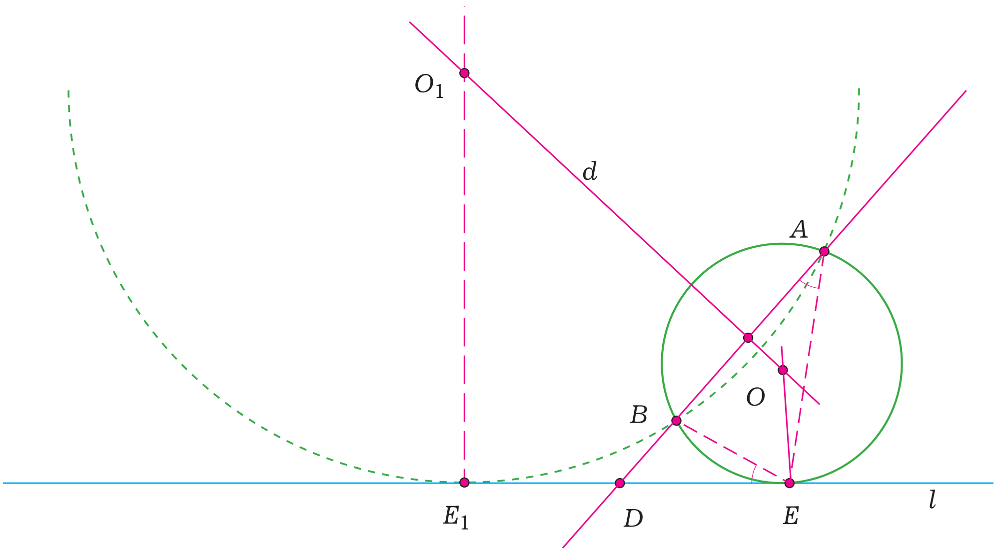

Рис. 5

Итак, данные фигуры могут иметь различное расположение относительно друг друга, а в зависимости от этого имеется следующее количество решений.

1) Обе точки лежат на данной прямой. Тогда построить окружность, удовлетворяющую условию задачи, невозможно.

2) Одна точка лежит на данной прямой, а другая нет. Тогда возможно единственное решение, причём точка, лежащая на данной прямой, будет точкой касания этой прямой и искомой окружности.

3) Обе точки не лежат на данной прямой и расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой. В таком случае наша задача имеет два различных решения (на рис. 5 вторая окружность пунктиром), однако если две точки образуют прямую, которая параллельна исходной, то решение задачи будет единственное.

4) И наконец, случай, когда обе точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой. При таком расположении невозможно построить требуемую окружность.

Задача 4. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности с центром в точке O_1 (см. рисунок 6).

Построение.

1) Возьмём произвольную точку на данной окружности и обозначим её буквой C.

2) Построим окружность по трём точкам: A, B и C.

3) Точку пересечения построенной окружности и данной обозначим буквой D.

4) Проведём прямую CD.

5) Точку пересечения прямых AB и CD обозначим буквой P.

6) Построим касательную к данной окружности из точки P, точку касания обозначим буквой K.

7) Проведём окружность через точки A, B и K.

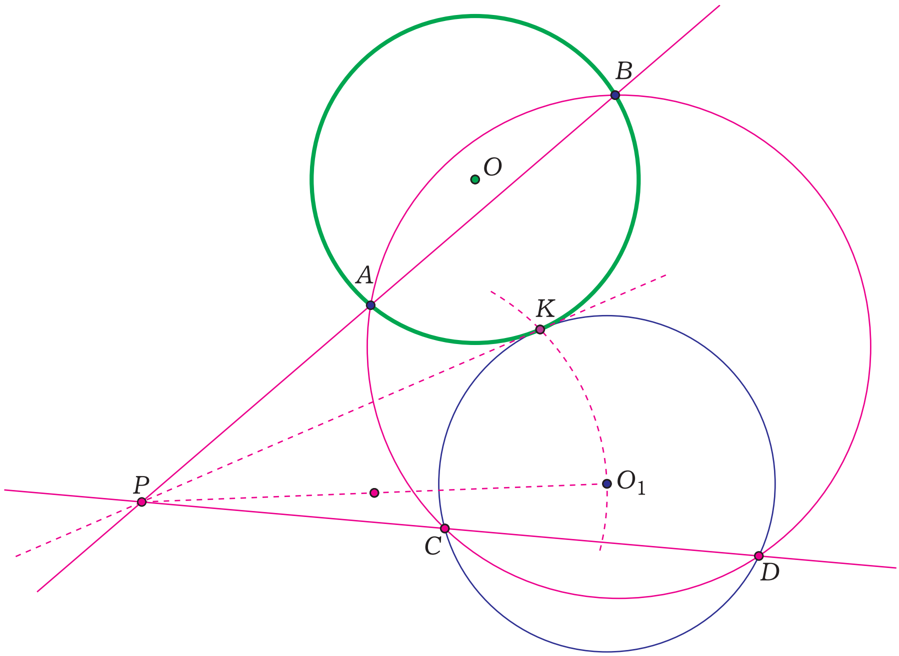

Рис. 6

Доказательство. Построенная окружность проходит через точки A и B по построению (см. пункт 7). Доказательство того, что окружность касается данной в точке K, основано, как и в доказательстве задачи 4, на том факте, что

$$PK^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Исследование. Во-первых, заметим, что приведённое решение «не работает», если прямые AB и CD окажутся параллельными. Это произойдёт, если серединный перпендикуляр к AB проходит через центр данной окружности, точку O_1. В этом случае точками касания будут точки пересечения серединного перпендикуляра с окружностью.

О количестве решений.

1) Обе точки лежат по одну сторону от окружности (вне её или внутри данной окружности). В этом случае можно построить две окружности, удовлетворяющие данным условиям.

2) Если обе точки лежат на данной окружности или одна из данных точек лежит внутри окружности, а вторая вне её, то данная окружность построена быть не может.

3) Если одна точка лежит на окружности, а другая нет, то при таком расположении данных фигур возможно построить искомую окружность единственным образом, причём точка, лежащая на окружности, будет точкой касания. Исследование задачи завершено.

И наконец, последняя задача.

Задача 5. Пусть даны точка A, прямая l и окружность с центром в точке O_1 и радиусом R_1. Необходимо построить окружность, которая касалась бы данной прямой, данной окружности и проходила бы через данную точку A (рис. 7).

Построение.

1) Построим прямую m, которая проходила бы через центр данной окружности, точку O_1, и была бы перпендикулярна данной прямой l.

2) Обозначим точку пересечения прямых m и l буквой G.

3) Обозначим точки пересечения прямой m и данной окружности буквами B и C.

4) Проведём прямую CA.

5) Построим окружность, проходящую через точки A, B и G. Обозначим точку пересечения построенной окружности и прямой CA буквой F.

6) Построим окружность, проходящую через точки A, F и касающуюся данной прямой (решение см. задачу 3).

Данная окружность является искомой.

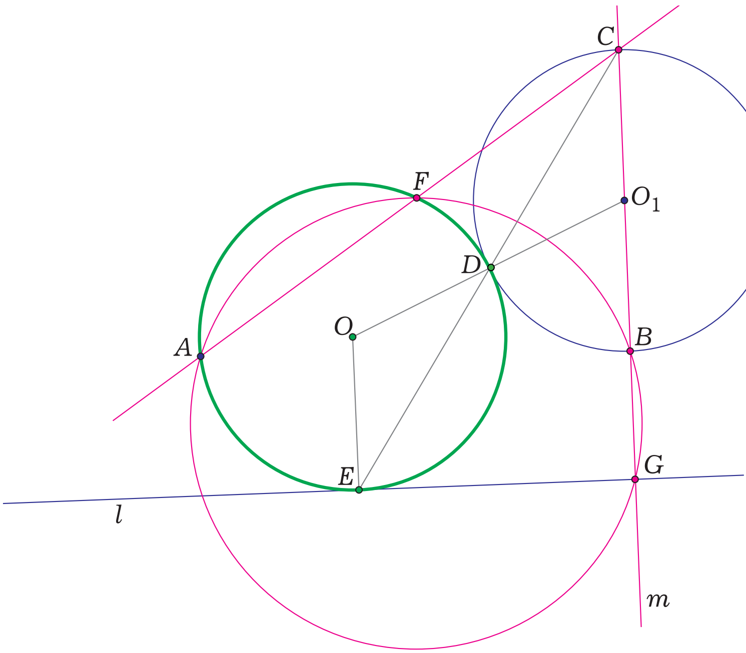

Рис. 7

Доказательство. Построенная окружность проходит через данную точку A и касается данной прямой l по построению (пункт 6). Докажем, что она также касается данной окружности. Обозначим точку касания искомой окружности и данной прямой буквой E. Соединим её с точкой C и определим точку D как точку пересечения данной окружности и прямой CE. Заметим, что так как E точка касания построенной окружности и данной прямой l, то $OE \perp l$, но и $m \perp l$. А значит, углы, образованные этими параллельными прямыми и секущей OO_1, равны как накрест лежащие, а именно, имеет место следующее равенство: $\angle EOO_1 = \angle CO_1O$. Два других угла,

$\angle EDO = \angle CDO_1$, равны как вертикальные. Из этих двух равенств следует, что треугольники EOD и CO_1D подобны. Из подобия следует следующее равенство:

$$\frac{EO}{CO_1} = \frac{OD}{O_1D},$$

но так как $O_1C = O_1D$, как радиусы данной окружности, то и $OE = OD$. Таким образом, мы доказали, что точка D лежит на отрезке OO_1 и она является единственной точкой, лежащей одновременно на данной и на построенной окружностях, то есть является точкой касания.

Что и требовалось доказать.

Исследование. Исследование в последней задаче, на наш взгляд, будет самым сложным, постараемся систематизировать различные случаи взаимного расположения данных фигур. Для этого представим следующую конструкцию: закрепим положение прямой и окружности, а положение данной точки будем менять.

I. Прямая не имеет общих точек с данной окружностью.

1) Если точка не лежит ни на прямой, ни на окружности, в этом случае может быть два, три или четыре различных решения. А может быть и такое расположение, когда задача не будет иметь решения вообще.

2) Если точка лежит на прямой, то в этом случае задача будет иметь два различных решения.

3) Если точка будет лежать на окружности, то в этом случае задача будет иметь одно или два решения.

4) Если точка будет лежать внутри окружности, то выполнить построение будет невозможно.

II. Прямая касается окружности.

1) Точка не лежит ни на прямой, ни на окружности. Два или одно возможное решение.

2) Точка лежит на прямой. Будет одно решение, исключая случай, когда данная точка будет точкой касания прямой и данной окружности, тогда решений будет бесконечно много.

3) Точка лежит на окружности. В этом случае решение будет одно или задачу вообще невозможно будет решить.

4) Если данная точка лежит внутри окружности, то задача будет иметь единственное решение.

III. Прямая пересекает окружность.

1) Точка не лежит ни на прямой, ни на окружности. Задача имеет одно или два решения.

2) Точка лежит на прямой, задача имеет два решения. Исключая случай, когда данная точка – это точка пересечения прямой и окружности, в этом случае задачу решить невозможно.

3) Данная точка лежит на окружности. Одно или два различных решения.

4) Точка лежит внутри окружности. В этом случае два решения.

Опыт исследования в этих задачах показал, что результаты решения зависят от первоначального расположения фигур. Надеемся, что наша статья поможет вам понять, как важно проводить исследование в задачах на построение.

Итак, мы рассмотрели пять различных задач на построение, которые объединены общей идеей построения окружности – окружности Аполлония. Как мы и обещали, все построения несложные и стандартные, все доказательства не выходят за рамки школьной программы. И если вас заинтересовали эти задачи, то можно смело познакомиться с методом инверсии и попытаться решить саму задачу Аполлония – попытаться построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.