Балашова Людмила Владимировна
*Учитель математики ГОУ СОШ №327 ЮВАО г. Москвы.
В 2002 году награждена знаком «Почётный работник общего образования РФ».*

Три беседы о параметрах

Многие вещи нам непонятны
не потому, что наши понятия
слабы, но потому, что многие вещи
не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

В статье рассказывается о различных восприятиях темы «Параметры» с разных сторон: со стороны искушённого в математике человека – студента или учителя – и со стороны ещё совсем неопытного в математике индивидуума – ученика. На основе двух различных позиций возникают методические идеи, которые и приводят к изложению темы в виде трёх обобщающих бесед.

Откровения учителя

Моё знакомство с параметрами состоялось довольно давно – лет двадцать пять тому назад. Это произошло в МГПИ им. В.И. Ленина на семинарах по введению в специальность. До сих пор я помню то ощущение радости, почти восторженности, которое я тогда испытала. Помню, что у меня было впечатление, когда казавшаяся дотоле скучной, «безжизненной» элементарная математика вдруг «ожила», обнаружив внутренние движения, подчиняющиеся некоторой безупречной логике.

Миновали годы. Юношеское столь эмоциональное восприятие параметров, конечно, прошло. Эта тема стала неотъемлемой частью моей работы при подготовке школьников к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. Однако в памяти моей сохраняется то светлое чувство, которое я испытала в своё время при знакомстве с этим необычайно красивым миром идей, называемых словом «параметры».

Откровения ученика

При встречах со старшеклассниками я постоянно слышу их разговоры о каком-то сложном разделе математики под названием «параметры». Ребята говорят, что хотя этот раздел есть часть элементарной математики, он в целом очень труден. Правда, мы уже встречались с понятием параметра, но основательно данной темой не занимались. Когда я вижу соответствующие задачи в учебниках для подготовки в вузы, то страшно пугаюсь, вспоминая рассказы моих товарищей.

Мне кажется, что я не смогу понять этой темы и не научусь решать задачи. Но учитель старается побороть мои печальные настроения, обещая, что от беседы к беседе мы будем обсуждать с ним различные методы решения задач с параметрами и скоро я пойму логику каждого метода.

Беседа 1

Однажды, когда почти все ученики разошлись по домам, один любознательный ученик подошёл к учителю и решил поговорить с ним о параметрах.

Ученик. Старшеклассники говорят, что «параметры» – это самая сложная тема школьной математики. Правда ли это?

Учитель. Я думаю, что это правда, однако слишком уж бояться не стоит. Главное – это хорошо усвоить, что такое параметр, и тогда ты сможешь легко решать задачи, в которых параметры применяются.

Ученик. Могли бы Вы привести мне примеры таких заданий, чтобы на них я смог проверить свои силы?

Учитель. Что ж, это похвально. Если ты готов, мы можем приступить прямо сейчас.

Ученик. Я готов.

Учитель. Начнём с самых простых примеров. Сравни числа 2 и 10.

Ученик. Число 2 меньше числа 10 – это же элементарно.

Учитель. А теперь сравни числа a и $5a$.

Ученик (*отвечает, не задумываясь*). Число a меньше, чем $5a$.

Учитель. ?

Ученик. Ой! По-моему, это не так просто. Ведь мы не знаем, что «скрывается» под буквой a!

Учитель. Верно. Попробуй порассуждать, придавая a различные значения.

Ученик. Кажется, я понял! Ведь если число a равно 0, то числа a и $5a$ оба равны 0. Тогда $a=5a$. Если число a больше 0, то $a<5a$, а если число a меньше 0, то $a>5a$. Правильно?

Учитель. Молодец. Вот и состоялось твоё первое знакомство со «страшным параметром».

Ученик. Кажется, я понял, что параметр – «нечто», похожее на переменную, которая может принимать различные значения. В зависимости от этих значений условие задачи выглядит по-разному.

Учитель. Хорошо, на первый раз такое толкование можно принять. Давай рассмотрим более сложный пример. Попробуй решить уравнение

$$(a-2)x=4.$$

Ученик (*подумав минуты две*). Я считаю, что уравнение решается очень просто – делением на $(a-2)$.

Ответ: $x=\frac{4}{a-2}$.

Учитель. Допустим. А если $a=2$?

Ученик. Ой! Ведь в этом случае нам придётся делить на 0, а в математике этого делать нельзя!

Учитель. Верно. Как же нам справиться с ситуацией?

Ученик (*подумав ещё минуты 3*). Надо рассмотреть сначала случай, когда $a=2$. Но тогда мы будем иметь не уравнение, а числовое равенство $0=4$. Оно не является верным. Значит, при таком значении a наше уравнение решений иметь не будет. Если $a\neq 2$, то перед нами уравнение первой степени и его решение $x=\frac{4}{a-2}$.

Учитель. Да. Молодец!

Ученик. А существуют ли *неравенства* с параметром?

Учитель. Конечно, существуют. Ты можешь попробовать решить такое: $ax>2$.

Ученик. Я уже понял, что нельзя решать сразу, как с числами. Попробую порассуждать. Если число $a=0$, то получим числовое неравенство $0>2$. Оно не является верным, значит, при таком a решений нет.

Учитель. А если $a\neq 0$? Как тогда надо действовать?

Ученик. Придётся поступать так же, как при решении обычных неравенств первой степени – делить обе части неравенства на a.

Учитель. А что будет со знаком неравенства?

Ученик. Разве с ним что-то может случиться? Ведь мы ничего не делали со знаком равенства, когда решали уравнение и делили на какое-то отличное от нуля число обе его части!

Учитель. Давай подумаем вместе. Если $a<0$, значит, мы делили обе части неравенства на отрицательное число, и тогда знак неравенства должен…

Ученик (*торопясь дополнить фразу учителя*) ...измениться на противоположный – получим $x<\frac{2}{a}$.

Учитель. А если $a>0$?

Ученик. Тогда при делении на положительное число знак неравенства не меняется, т. е. $x>\frac{2}{a}$.

Учитель. Задачи с параметром требуют предварительного рассмотрения нескольких случаев. В необходимости быть *всегда* предусмотрительным и состоит их первая, основная трудность. Но ещё одна «закавыка» кроется в необходимости кратко и правильно записать ответ задачи. Давай проанализируем решение и зафиксируем все наши выводы.

Ученик. Запишем **ответ:** если $a>0$, то $x>\frac{2}{a}$, если $a<0$, то $x<\frac{2}{a}$.

Учитель. И это всё?

Ученик. Постойте, постойте! Мы забыли самое начало нашего решения – случай, когда $a=0$.

Учитель. Вот видишь, как важно записывать все выводы. При многих «разветвлениях» решения необходимость записи ответа заставляет нас заново просматривать все этапы решения, чтобы не опустить чего-нибудь. Итак, запишем окончательно:

Ответ: если $a<0$, то $x<\frac{2}{a}$, при $a=0$ решений нет, если $a>0$, то $x>\frac{2}{a}$.

Беседа 2

Учитель. До сих пор мы рассматривали простые примеры. Но если хочешь, то можем перейти к примерам посложней.

Ученик. Я готов.

Учитель. Реши уравнение

$$ax^2 + x + 2 - a = 0.$$

Ученик. С чего же начать?

Учитель. Прежде всего надо посмотреть, нет ли такого значения параметра, при котором коэффициент при старшей степени обращается в 0.

Ученик. Почему?

Учитель. Потому что при этом значении уравнение перестаёт быть квадратным. В нашем случае при $a = 0$ оно стало линейным, а методы решения линейных и квадратных уравнений разные!

Ученик. Понял. Итак, рассмотрим уравнение при $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Учитель. Давай теперь «пройдёмся» по всем остальным значениям параметра.

Ученик. Если $a \neq 0$, то уравнение уже будет квадратным. Для его решения надо найти дискриминант $D = 1 - 4a(2 - a) = 1 - 8a + 4a^2$. А знак D? Надо опять рассматривать разные случаи?

Учитель. Верно. Это называется «ветвлением» задачи.

Ученик. В данном случае задача «ветвится» на три части:

$$D < 0,\ D = 0,\ D > 0.$$

Учитель. Теперь рассматривай каждую «ветвь» решения отдельно.

Ученик. Рассмотрим, как вы мне говорили раньше, сначала самый лёгкий случай, а он получается, когда $D < 0$. Корень из отрицательного числа не извлекается, значит, уравнение не имеет решений.

Учитель. Не торопись. Надо не только сказать, что $D < 0$, но обязательно указать те значения параметра, при которых это имеет место.

Ученик. Выходит надо решать вспомогательное неравенство $4a^2 - 8a + 1 < 0$. Но это просто. Учитывая, что при a во вспомогательном неравенстве стоит чётный коэффициент, воспользуемся более простой формулой для вычисления корней уравнения $4a^2 - 8a + 1 = 0$:

$$a_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку у параболы $y(a) = 4a^2 - 8a + 1$ ветви направлены вверх, значения трёхчлена будут отрицательны при $a \in \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2};\ \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)$. Значит, при указанных значениях a *решений нет*.

Учитель. Итак, мы установили, что существуют такие значения параметра a, при которых значений переменной x не существует. Ситуация похожа на ту, когда человек, обнаруживший опасный участок, огораживает его заборчиком, чтобы другие люди по нему не ходили. Но наша задача ещё далеко не решена. Какая будет следующая ветвь решения?

Ученик. Теперь рассмотрим $D = 0$, т. е. $4a^2 - 8a + 1 = 0$, $a = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что если $a = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$, то $x = -\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$; если $a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, то

$$x = -\frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

Остаётся рассмотреть последний случай, когда $4a^2-8a+1>0$. Это справедливо при $a<\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ или при $a>\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, и уравнение имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a^2-8a+1}}{2a}.$$

Ответ: если $a=0$, то $x=-2$; если $a\in\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, то решений нет; если

$$a\in\left(-\infty;\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right),$$

то $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a^2-8a+1}}{2a}$.

Здорово! Мне понравилось решать задачи с параметром.

Учитель. А можешь ли ты *теперь* сформулировать, что такое параметр?

Ученик. Попробую. По-моему, это ещё одна переменная. Но если мы привыкли обозначать переменные как x и y, то параметр будем обозначать буквой a. Если в задании кроме переменных x и y встречаются ещё буквы, то это и будет задача с параметром.

Учитель. А можешь ли ты припомнить, где в школьной математике встречается понятие параметра, а слово «параметр» ещё не употребляется?

Ученик (после длительного раздумья). Когда мы «проходили» линейную функцию, то записывали выражение, которым она задаётся: $y=kx+b$, $k\neq 0$. В определении сказано, что y и x – переменные, а k и b – числа! Значит, они и есть параметры?

Учитель. Правильно. А что зависит от этих параметров?

Ученик. Зависит расположение графика линейной функции. Если $b=0$, то $y=kx$ – прямая пропорциональность, а график проходит через начало координат, причём в случае $k>0$ он лежит в I и III координатных четвертях, а в случае $k<0$ находится во II и IV четвертях.

Если $k\neq 0$, $b\neq 0$, то мы видим «обычную» прямую.

Учитель. В выражении $y=kx+b$, задающем линейную функцию, параметр k называется угловым коэффициентом прямой.

Ученик. Значит, иногда при решении задач с параметром можно использовать координатную плоскость и графики?

Учитель. Совершенно верно.

Беседа 3

Учитель. В прошлый раз мы познакомились с понятием «параметр» и решали простейшие задачи. Сегодня поговорим о других примерах с параметрами и возможных методах их решения. Готов?

Ученик. Да.

Учитель. Давай попробуем решить такую задачу: для каждого значения параметра a определить количество решений уравнения

$$\left|x^2-2x-3\right|=a.$$

Ученик. В левой части уравнения стоит выражение с модулем, значит, при $a<0$ решений нет.

Учитель. Верно!

Ученик. Если $a=0$, то под знаком модуля должен стоять нуль, значит, $x^2-2x-3=0$, т. е. $x=-1$ или $x=3$.

А если $a>0$, то необходимо рассмотреть два случая:

$$x^2-2x-3=a \qquad (1)$$

или

$$x^2-2x-3=-a. \qquad (2)$$

Решим отдельно каждое квадратное уравнение.

Рассмотрим сначала уравнение (1): $x^2-2x-3=a$, $x^2-2x-3-a=0$, $D_1=$ $=1+3+a=4+a$. Ой! Не знаем знак D_1. Значит, задача «распадается» на три части:

$D_1<0$, $a<-4$, решений нет;

$D_1=0$, $a=-4$, решений нет;

$D_1>0$, $a>-4$, но необходимо учесть, что $a>0$, поэтому уравнение имеет два корня.

Учитель. Теперь рассмотри уравнение (2): $x^2-2x-3+a=0$, $D_1=4-a$.

Ученик. Опять задача ветвится?

Учитель. Конечно.

Ученик. При $a>4$ решений нет, при $a=4$ уравнение имеет одно решение, при $a<4$ уравнение имеет два решения.

Ура! Осталось только записать ответ, совместив решение первого и второго уравнений.

Учитель. Итак, мы готовы записать ответ:

при $a<0$ решений нет,

при $0<a<4$ уравнение имеет четыре решения,

при $a=4$ уравнение имеет три решения,

при $a>4$ уравнение имеет два решения.

Ученик. Ну, наконец-то! Неужели такое длинное решение является рациональным?

Учитель. Молодец! Решил правильно и задал очень важный вопрос. Этот способ решения можно назвать аналитическим – ты работал с формулами. Но данную задачу можно решать и графическим методом.

Ученик. Здорово! Графики очень наглядны. Важно только их правильно построить.

Учитель. Давай вспомним, графики каких функций ты умеешь строить?

Ученик (задумался). Я умею строить график линейной функции $y = kx + b$. Для построения прямой достаточно взять две точки. Удобнее всего рассмотреть точки пересечения с осями координат. Ой! А ведь k и b тоже параметры!

Учитель. Верно. Они будут влиять на расположение графика.

Ученик. Ещё я умею строить параболу, гиперболу, арифметический квадратный корень. Этого достаточно для решения задач?

Учитель. Для успешного решения задач графическим методом необходимо уметь строить не только графики функций, но и графики кривых, заданных уравнениями, например, график окружности. И ещё необходимо уметь преобразовывать графики.

Ученик. Как же будем решать нашу задачу?

Учитель. Давай построим эскиз графика функции $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$, а затем пересечём его прямой $y = a$. Тогда абсциссы точек пересечения и будут решениями нашего уравнения.

Ученик. Сначала строим эскиз графика функции $y = x^2 - 2x - 3$:

1) $x_в = 1$, $y_в = -4$, вершина $A(1; -4)$.

2) нули функции: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

3) пересечение с осью Oy: $x = 0$, $y = -3$.

4) действуем по правилу построения графика $y = |f(x)|$.

Выделим для наглядности построенный график на рис. 1.

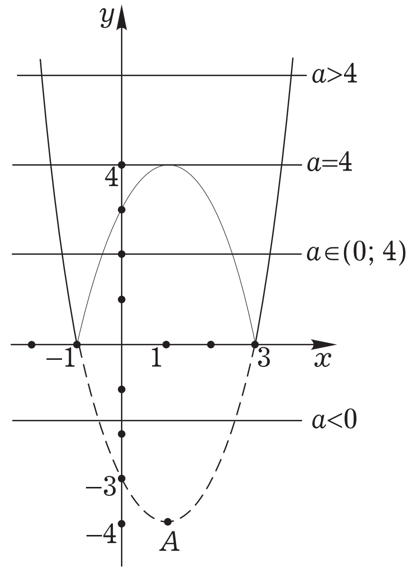

Рис. 1

Учитель. Давай попробуем проводить прямые вида $y = a = \text{const}$ и смотреть, сколько раз при различных a эти прямые пересекаются с графиком.

Ученик. Здорово! Ответ видно сразу: при $a < 0$ решений нет, при $0 < a < 4$ уравнение имеет четыре решения, при $a = 4$ уравнение имеет три решения, при $a > 4$ уравнение имеет два решения, и не надо решать два квадратных уравнения, не надо рассматривать знаки дискриминанта, не надо совмещать решение первого и второго уравнений. Мне понравился данный метод решения. Имеет ли он название?

Учитель. Можно назвать его «метод сечений». Существуют и другие графические методы решений уравнений с параметром. Но мы на этом закончим первое знакомство с параметром.