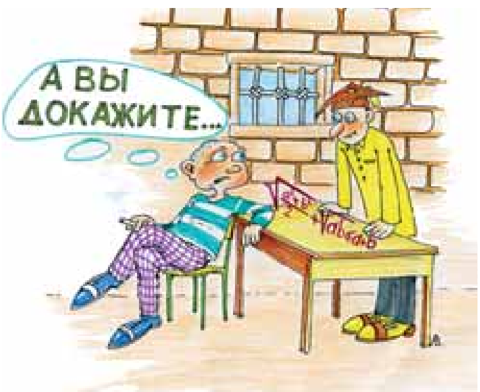
Попов Сергей Вячеславович
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова, заслуженный деятель науки Республики Саха (Якутия), лауреат Государственной премии Республики Саха (Якутия) по педагогике им. М.А. Алексеева 2007 года, председатель жюри Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике.

Два метода доказательства неравенств

В статье рассматриваются метод Штурма для доказательства классических неравенств, а также один из приёмов Коши для доказательства неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом с необычным применением метода математической индукции. Использование этих двух методов позволяет решать некоторые задачи олимпиадного характера.



Задача 1. Произведение n положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшей величины при равенстве сомножителей.

Решение. *Метод Штурма.* Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — система n сомножителей, сумма которых равна nc, причём таких, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = c$, то есть все они равны между собой. Тогда их произведение $P = y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = c^n$. Далее, пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — ещё одна система n сомножителей, сумма которых также равна nc, причём среди этих сомножителей имеются неравные. Докажем, что произведение $P_1 = z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$ меньше, чем произведение $P = y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$. Поскольку среди сомножителей произведения P_1 имеются различные, то ясно, что среди них имеется хотя бы один больше, чем c, и один меньше. Для определённости пусть

$$z_1 = c + \alpha, \qquad z_2 = c - \beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тогда

$$P_1 = (c+\alpha)(c-\beta) z_3 \cdot \ldots \cdot z_n =$$

$$= [c^2 + c(\alpha - \beta) - \alpha\beta] z_3 \cdot \ldots \cdot z_n.$$

Если заменим $c+\alpha$ на c, а $c-\beta$ на $c+\alpha-\beta$, то сумма этих двух сомножителей не изменится, а их произведение станет $c^2 + c(\alpha-\beta)$ (было $c^2 + c(\alpha-\beta) - \alpha\beta$), то есть увеличится, тогда и произведение

$$P_2 = c(c+\alpha-\beta)z_3 \cdot \ldots \cdot z_n =$$

$$= [c^2 + c(\alpha-\beta)]z_3 \cdot \ldots \cdot z_n$$

больше, чем произведение P_1. Итак, $P_2 > P_1$; это неравенство получилось в результате того, что один сомножитель сделали равным c, в то же время другой сомножитель — равным $c+\alpha-\beta$ при сохранении их суммы.

Если сделаем так, чтобы ещё один сомножитель стал равным c, то получим произведение $P_3 > P_2$, таким образом, будем иметь $P_3 > P_2 > P_1$. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному c, а произведение с каждым разом будет увеличиваться. Когда все сомножители станут равными, то получим наибольшее возможное произведение $P = c^n$.

Задача 2. Сумма n положительных переменных слагаемых, произведение которых постоянно, достигает наименьшей величины при равенстве слагаемых.

Решение. *Метод Штурма.* Доказательство этого примера аналогично предыдущему примеру 1. Пусть y_1, y_2, ..., y_n — система n сомножителей, произведение которых равно c^n, причём таких, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = c$, то есть все они равны между собой. Тогда их сумма $S = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = nc$. Далее, пусть z_1, z_2, ..., z_n — ещё одна система n сомножителей, произведение которых также равно c^n, причём среди этих сомножителей имеются неравные.

Докажем, что сумма $S_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ больше, чем сумма $S = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Поскольку среди слагаемых суммы S_1 имеются различные, то ясно, что среди них имеется хотя бы один больше, чем c, и один меньше. Для определённости пусть

$$z_1 = c+\alpha, \qquad z_2 = c-\beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тогда

$$S_1 = (c+\alpha) + (c-\beta) + z_3 + \ldots + z_n =$$

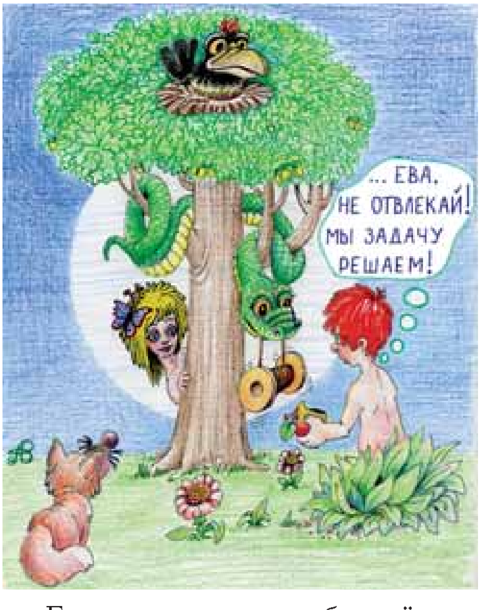
$$= (2c+\alpha-\beta) + z_3 + \ldots + z_n.$$

Если заменим $c+\alpha$ на c, а $c-\beta$ на $(c+\alpha)(c-\beta)/c$, то произведение этих двух сомножителей не изменится, а их сумма станет $2c+\alpha-\beta-\alpha\beta/c$ (была $2c+\alpha-\beta$), то есть уменьшится, тогда и сумма

$$S_2 = c + \frac{(c+\alpha)(c-\beta)}{c} + z_3 + \ldots + z_n =$$

$$= \left(2c + (\alpha-\beta) - \frac{\alpha\beta}{c}\right) + z_3 + \ldots + z_n$$

меньше, чем сумма S_1. Итак, $S_2 < S_1$; это неравенство получилось в результате того, что один сомножитель сделали равным c, в то же время другой сомножитель стал равным $(c+\alpha)(c-\beta)/c$ при сохранении их произведения.



Если сделаем так, чтобы ещё один сомножитель стал равным c, то получим сумму $S_3 < S_2$, таким образом, будем иметь $S_3 < S_2 < S_1$. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному c, а сумма с каждым разом будет уменьшаться. Когда все сомножители станут равными, то получим наименьшую возможную сумму $S = nc$.

Задача 3. Докажите, что среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не меньше их среднего геометрического

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

причём если среди этих чисел имеются хотя бы два различных, то неравенство строгое.

Решение. *Способ 1.* Пусть сумма n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна nc, то есть $a_1+a_2+\ldots+a_n = nc$, тогда на основании примера 1 имеем

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant c^n = \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n,$$

откуда после извлечения корня n-й степени из обеих частей получим ответ. Из примера 1 также следует, что знак равенства имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Способ 2. Пусть произведение n чисел $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ равно c^n, то есть $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = c^n$, тогда на основании примера 2 имеем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant nc = n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

что и требовалось доказать.

Способ 3 (индукция по Коши). Вначале утверждение примера 3 доказывается при помощи математической индукции для всех чисел n вида 2^k. После этого доказательство примера проводится для всех остальных натуральных n, которые нельзя представить в виде 2^k.

Утверждение, очевидно, верно при $n = 2^1$. Предположим, что оно верно для некоторого целого положительного числа n вида 2^k, то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}.$$

Докажем, что отсюда следует

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k} a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} \geqslant$$

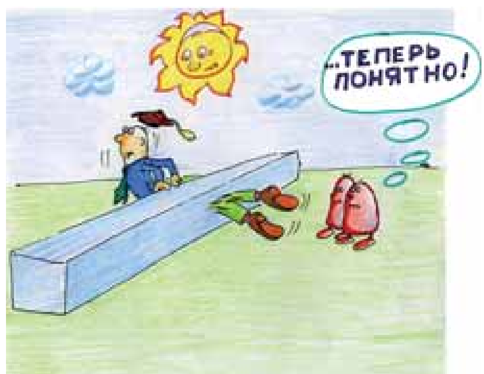
$$\geqslant \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}} \times$$

$$\times \sqrt{\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} =$$

$$= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k} a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}.$$

Докажем неравенство для некоторого натурального m, которое нельзя представить в виде 2^k. Очевидно, найдётся k такое, что $2^{k-1} < m < 2^k$. Пусть

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} = d.$$



Тогда для 2^k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m, \overbrace{d, \ldots, d}^{2^k - m}$ имеем доказанное неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \overbrace{d + \ldots + d}^{2^k - m}}{2^k} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k - m}},$$

то есть

$$\frac{md + (2^k - m)d}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k - m}},$$

или

$$d \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k - m}},$$

откуда $d^{2^k} \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k - m}$, а после сокращения на $d^{2^k - m}$ получим

$$d^m \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m,$$

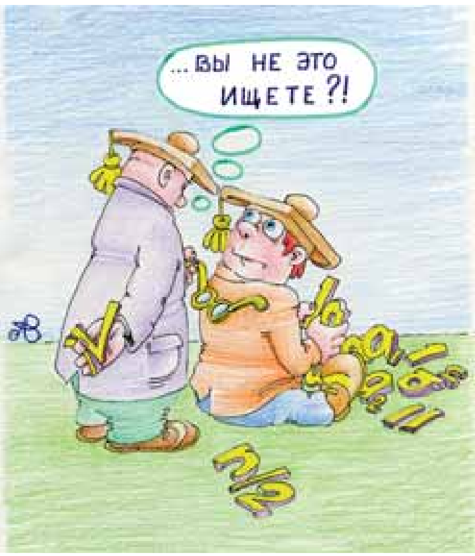
откуда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m}.$$

Задача 4. *(Туймаада-2000).* Докажите, что если произведение положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно единице, то

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} \geqslant \frac{n}{2}.$$



Решение. *Метод Штурма.* Заметим, что при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ неравенство обращается в равенство. Предположим, что не все числа равны 1. Тогда среди них есть число, меньшее 1, и число, большее 1. Поскольку все переменные входят в неравенство симметричным образом, без ограничения общности можно считать, что $a_1 < 1$ и $a_2 > 1$.

Заменим числа a_1 и a_2 числами 1 и $a_1 a_2$ и докажем, что выражение в левой части нашего неравенства не увеличится. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{a_1 a_2(a_1 a_2 + 1)},$$

которое после домножения на положительный общий знаменатель приводится к виду

$$(a_2 - 1)(a_1 - 1)(a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_2 + 2a_1 a_2^2 +$$

$$+5a_1 a_2 + 2a_1 + 2a_2 + 2) \leqslant 0,$$

что при положительных $a_1 < 1$ и $a_2 > 1$ очевидно.

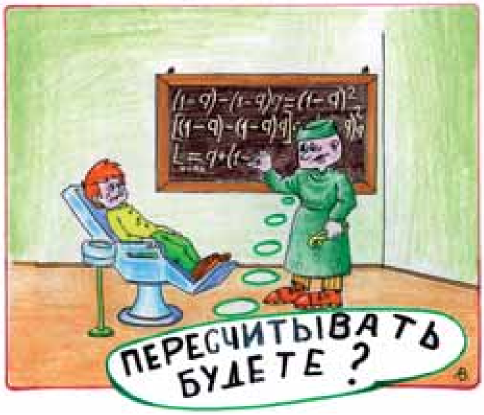
Если теперь ещё не все $n - 1$ чисел равны единице, проделаем такую же замену с двумя следующими числами, отличными от 1. В результате два числа заменятся на 1 и т. д. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному 1, а сумма с каждым разом будет уменьшаться. Когда все числа станут равными, то получим наименьшую возможную сумму $n/2$.

Задача 5. *(Туймаада-2000).* Для действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n докажите неравенство

$$\left(\frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} - 1\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right),$$

где $0 < a_k \leqslant 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$.



Решение. *Метод Штурма.* Обозначим через d среднее арифметическое $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ чисел a_1, a_2, ..., a_n. Когда все a_k равны d, неравенство из условия обращается в равенство. Предположим, что среди a_k есть различные. Без ограничения общности можно предположить, что $a_1 < d$ и $a_2 > d$. Заменим эти числа числами d и $a_1 + a_2 - d$. В правой части нашего неравенства изменятся только первые два множителя; убедимся, что их произведение уменьшится. Действительно, неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right) >$$

$$> \left(\frac{1}{d} - 1\right)\left(\frac{1}{a_1 + a_2 - d} - 1\right)$$

после домножения на общий знаменатель приводится к виду

$$(1 - a_1 - a_2)(d - a_1)(a_2 - d) > 0,$$

что справедливо в силу наших предположений.

Кроме того, в результате замены a_1 и a_2 на d и $a_1 + a_2 - d$ в нашем наборе из n чисел уменьшилось количество чисел, отличных от d. Производя такие замены, пока это возможно, в конце концов можно заменить все числа n экземплярами d; выражение

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

при этом, всё время уменьшаясь, заменится на $(1/d - 1)^n$, что и доказывает наше неравенство и одновременно указывает единственный случай, когда оно обращается в равенство.

Индукция по Коши. Утверждение верно при $n = 2^1$. (Докажите!) Предположим, что оно верно для некоторого целого положительного числа n вида 2^k, то есть

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^k}} - 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^k}{a_1 + \ldots + a_{2^k}} - 1\right)^{2^k}.$$

Докажем, что отсюда следует неравенство для числа 2^{k+1}. В самом деле,

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^k}} - 1\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a_{2^k+1}} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^{k+1}}} - 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^k}{a_1 + \ldots + a_{2^k}} - 1\right)^{2^k} \times$$

$$\times \left(\frac{2^k}{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}} - 1\right)^{2^k} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^{k+1}}{a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}} - 1\right)^{2^{k+1}}.$$

Доказательство неравенства для некоторого натурального m, которое нельзя представить в виде 2^k, полностью аналогично доказательству примера 3. Действительно, для некоторого натурального m найдётся k такое, что $2^{k-1} < m < 2^k$. Пусть $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)/m = d$. Тогда для 2^k чисел a_1, a_2, ..., a_m, $\underbrace{d, \ldots, d}_{2^k - m}$ имеем доказанное неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_m} - 1\right) \times$$

$$\times \underbrace{\left(\frac{1}{d}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{d}-1\right)}_{2^k-m} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^k}{a_1+\ldots+a_m+\underbrace{d+\ldots+d}_{2^k-m}}-1\right)^{2^k} =$$

$$= \left(\frac{2^k}{dm+(2^k-m)d}-1\right)^{2^k-m+m} =$$

$$= \left(\frac{1}{d}-1\right)^{2^k-m}\left(\frac{1}{d}-1\right)^{m},$$

откуда

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_m}-1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{m}{a_1+a_2+\ldots+a_m}-1\right)^{m}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сумма действительных чисел x, y и z равна 3, а сумма их попарных произведений равна a. Докажите неравенство

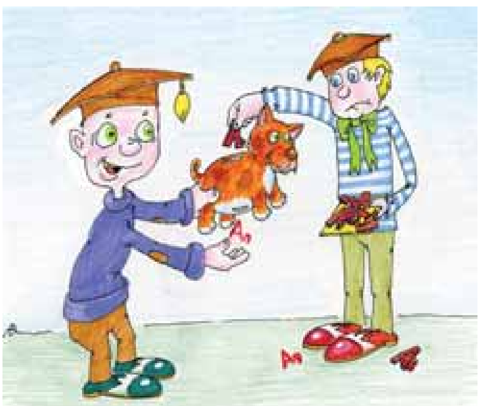
$$(x-1)^2 < 4\left(1-\frac{a}{3}\right).$$

Задача 2. Докажите, что для любых действительных чисел одного знака a_1, a_2, ..., a_n, которые больше -1, имеет место неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant$$

$$\geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Когда достигается равенство?



Задача 3. Докажите, что если $n \geqslant 2$ и a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, S — их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Задача 4. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, которые удовлетворяют условию $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n = a$, имеет место неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{a})^n.$$

Задача 5. Действительные числа a_1, a_2, ..., a_n удовлетворяют условию $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$. Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее из этих чисел. Докажите, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \leqslant -nmM.$$

Задача 6. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Задача 7. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$$

при $0 \leqslant a_k \leqslant 1$, $k=1, 2, \ldots, n$.