есть увеличится, тогда и произведение

$$P_2 = c(c+\alpha-\beta)z_3 \cdot \ldots \cdot z_n =$$

$$= [c^2 + c(\alpha-\beta)]z_3 \cdot \ldots \cdot z_n$$

больше, чем произведение P_1. Итак, $P_2 > P_1$; это неравенство получилось в результате того, что один сомножитель сделали равным c, в то же время другой сомножитель — равным $c+\alpha-\beta$ при сохранении их суммы.

Если сделаем так, чтобы ещё один сомножитель стал равным c, то получим произведение $P_3 > P_2$, таким образом, будем иметь $P_3 > P_2 > P_1$. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному c, а произведение с каждым разом будет увеличиваться. Когда все сомножители станут равными, то получим наибольшее возможное произведение $P = c^n$.

Задача 2. Сумма n положительных переменных слагаемых, произведение которых постоянно, достигает наименьшей величины при равенстве слагаемых.

Решение. *Метод Штурма.* Доказательство этого примера аналогично предыдущему примеру 1. Пусть y_1, y_2, ..., y_n — система n сомножителей, произведение которых равно c^n, причём таких, что $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = c$, то есть все они равны между собой. Тогда их сумма $S = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = nc$. Далее, пусть z_1, z_2, ..., z_n — ещё одна система n сомножителей, произведение которых также равно c^n, причём среди этих сомножителей имеются неравные.

Докажем, что сумма $S_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ больше, чем сумма $S = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Поскольку среди слагаемых суммы S_1 имеются различные, то ясно, что среди них имеется хотя бы один больше, чем c, и один меньше. Для определённости пусть

$$z_1 = c+\alpha, \qquad z_2 = c-\beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тогда

$$S_1 = (c+\alpha) + (c-\beta) + z_3 + \ldots + z_n =$$

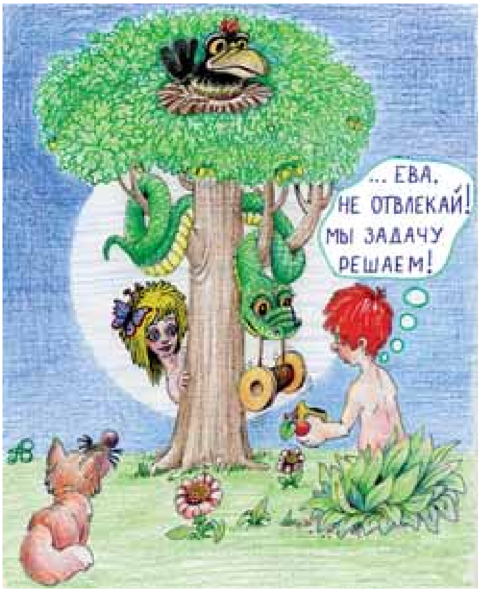
$$= (2c+\alpha-\beta) + z_3 + \ldots + z_n.$$

Если заменим $c+\alpha$ на c, а $c-\beta$ на $(c+\alpha)(c-\beta)/c$, то произведение этих двух сомножителей не изменится, а их сумма станет $2c+\alpha-\beta-\alpha\beta/c$ (была $2c+\alpha-\beta$), то есть уменьшится, тогда и сумма

$$S_2 = c + \frac{(c+\alpha)(c-\beta)}{c} + z_3 + \ldots + z_n =$$

$$= \left(2c + (\alpha-\beta) - \frac{\alpha\beta}{c}\right) + z_3 + \ldots + z_n$$

меньше, чем сумма S_1. Итак, $S_2 < S_1$; это неравенство получилось в результате того, что один сомножитель сделали равным c, в то же время другой сомножитель стал равным $(c+\alpha)(c-\beta)/c$ при сохранении их произведения.



Если сделаем так, чтобы ещё один сомножитель стал равным c, то получим сумму $S_3 < S_2$, таким образом, будем иметь $S_3 < S_2 < S_1$. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному c, а сумма с каждым разом будет уменьшаться. Когда все сомножители станут равными, то получим наименьшую возможную сумму $S = nc$.

Задача 3. Докажите, что среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n не меньше их среднего геометрического

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

причём если среди этих чисел имеются хотя бы два различных, то неравенство строгое.

Решение. *Способ 1.* Пусть сумма n чисел a_1, a_2, ..., a_n равна nc, то есть $a_1+a_2+\ldots+a_n = nc$, тогда на основании примера 1 имеем

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant c^n = \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n,$$

откуда после извлечения корня n-й степени из обеих частей получим ответ. Из примера 1 также следует, что знак равенства имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Способ 2. Пусть произведение n чисел $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ равно c^n, то есть $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = c^n$, тогда на основании примера 2 имеем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant nc = n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

что и требовалось доказать.

Способ 3 (индукция по Коши). Вначале утверждение примера 3 доказывается при помощи математической индукции для всех чисел n вида 2^k. После этого доказательство примера проводится для всех остальных натуральных n, которые нельзя представить в виде 2^k.

Утверждение, очевидно, верно при $n = 2^1$. Предположим, что оно верно для некоторого целого положительного числа n вида 2^k, то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}.$$

Докажем, что отсюда следует

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k} a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}} \times$$

$$\times \sqrt{\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} =$$

$$= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k} a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}.$$

Докажем неравенство для некоторого натурального m, которое нельзя представить в виде 2^k. Очевидно, найдётся k такое, что $2^{k-1} < m < 2^k$. Пусть

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} = d.$$

Тогда для 2^k чисел a_1, a_2, ..., a_m, $\underbrace{d, \ldots, d}_{2^k - m}$ имеем доказанное неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \overbrace{d + \ldots + d}^{2^k - m}}{2^k} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k-m}},$$

то есть

$$\frac{md+(2^k-m)d}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k-m}},$$

или

$$d \geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k-m}},$$

откуда $d^{2^k} \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m d^{2^k-m}$, а после сокращения на d^{2^k-m} получим

$$d^m \geqslant a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m,$$

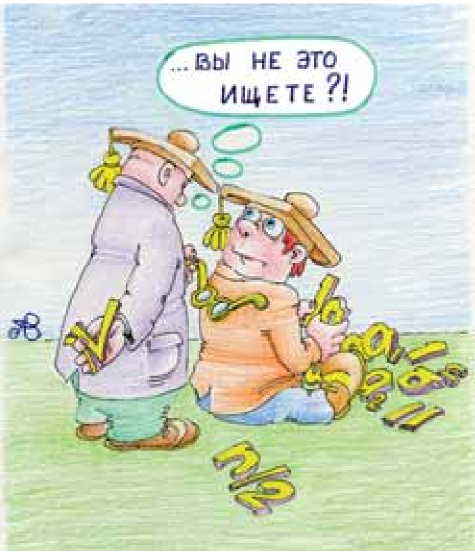
откуда

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m} \geqslant \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_m}.$$

Задача 4. *(Туймаада-2000).* Докажите, что если произведение положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно единице, то

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{a_n(a_n+1)} \geqslant \frac{n}{2}.$$



Решение. *Метод Штурма.* Заметим, что при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ неравенство обращается в равенство. Предположим, что не все числа равны 1. Тогда среди них есть число, меньшее 1, и число, большее 1. Поскольку все переменные входят в неравенство симметричным образом, без ограничения общности можно считать, что $a_1 < 1$ и $a_2 > 1$.

Заменим числа a_1 и a_2 числами 1 и a_1a_2 и докажем, что выражение в левой части нашего неравенства не увеличится. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{a_1(a_1+1)}+\frac{1}{a_2(a_2+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{a_1a_2(a_1a_2+1)},$$

которое после домножения на положительный общий знаменатель приводится к виду

$$(a_2-1)(a_1-1)(a_1^2a_2^2+2a_1^2a_2+2a_1a_2^2+$$

$$+5a_1a_2+2a_1+2a_2+2) \leqslant 0,$$

что при положительных $a_1 < 1$ и $a_2 > 1$ очевидно.

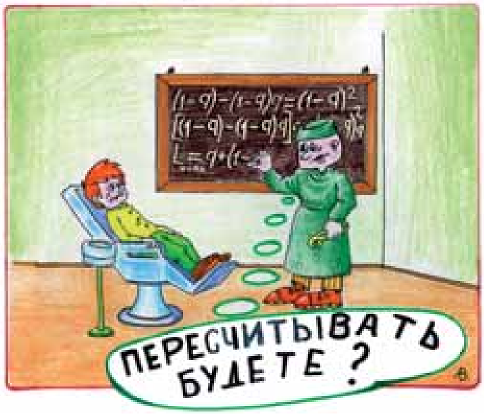
Если теперь ещё не все $n-1$ чисел равны единице, проделаем такую же замену с двумя следующими числами, отличными от 1. В результате два числа заменятся на 1 и т. д. Продолжая эту операцию дальше, получим каждый раз ещё по одному сомножителю, равному 1, а сумма с каждым разом будет уменьшаться. Когда все числа станут равными, то получим наименьшую возможную сумму $n/2$.

Задача 5. *(Туймаада-2000).* Для действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n докажите неравенство

$$\left(\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}-1\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_n}-1\right),$$

где $0 < a_k \leqslant 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$.



Решение. *Метод Штурма.* Обозначим через d среднее арифметическое $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ чисел a_1, a_2, ..., a_n. Когда все a_k равны d, неравенство из условия обращается в равенство. Предположим, что среди a_k есть различные. Без ограничения общности можно предположить, что $a_1 < d$ и $a_2 > d$. Заменим эти числа числами d и $a_1 + a_2 - d$. В правой части нашего неравенства изменятся только первые два множителя; убедимся, что их произведение уменьшится. Действительно, неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right) > \left(\frac{1}{d} - 1\right)\left(\frac{1}{a_1 + a_2 - d} - 1\right)$$

после домножения на общий знаменатель приводится к виду

$$(1 - a_1 - a_2)(d - a_1)(a_2 - d) > 0,$$

что справедливо в силу наших предположений.

Кроме того, в результате замены a_1 и a_2 на d и $a_1 + a_2 - d$ в нашем наборе из n чисел уменьшилось количество чисел, отличных от d. Производя такие замены, пока это возможно, в конце концов можно заменить все числа n экземплярами d; выражение

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

при этом, всё время уменьшаясь, заменится на $(1/d - 1)^n$, что и доказывает наше неравенство и одновременно указывает единственный случай, когда оно обращается в равенство.

Индукция по Коши. Утверждение верно при $n = 2^1$. (Докажите!) Предположим, что оно верно для некоторого целого положительного числа n вида 2^k, то есть

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^k}} - 1\right) \geqslant \left(\frac{2^k}{a_1 + \ldots + a_{2^k}} - 1\right)^{2^k}.$$

Докажем, что отсюда следует неравенство для числа 2^{k+1}. В самом деле,

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^k}} - 1\right) \times \left(\frac{1}{a_{2^k+1}} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_{2^{k+1}}} - 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^k}{a_1 + \ldots + a_{2^k}} - 1\right)^{2^k} \times \left(\frac{2^k}{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}} - 1\right)^{2^k} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^{k+1}}{a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}} - 1\right)^{2^{k+1}}.$$

Доказательство неравенства для некоторого натурального m, которое нельзя представить в виде 2^k, полностью аналогично доказательству примера 3. Действительно, для некоторого натурального m найдётся k такое, что $2^{k-1} < m < 2^k$. Пусть $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)/m = d$. Тогда для 2^k чисел a_1, a_2, ..., a_m, $\underbrace{d, \ldots, d}_{2^k - m}$ имеем доказанное неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_m} - 1\right) \times$$

$$\times \underbrace{\left(\frac{1}{d}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{d}-1\right)}_{2^k-m} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2^k}{a_1+\ldots+a_m+\underbrace{d+\ldots+d}_{2^k-m}}-1\right)^{2^k} =$$

$$= \left(\frac{2^k}{dm+(2^k-m)d}-1\right)^{2^k-m+m} =$$

$$= \left(\frac{1}{d}-1\right)^{2^k-m}\left(\frac{1}{d}-1\right)^{m},$$

откуда

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_m}-1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{m}{a_1+a_2+\ldots+a_m}-1\right)^{m}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сумма действительных чисел x, y и z равна 3, а сумма их попарных произведений равна a. Докажите неравенство

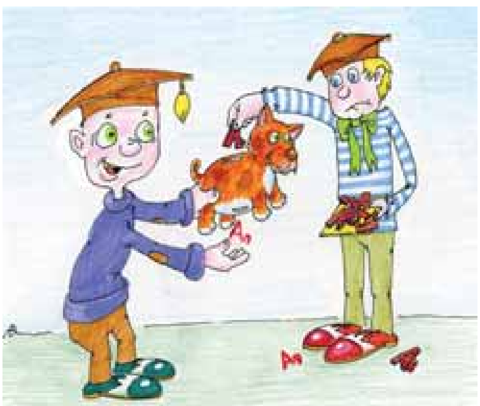
$$(x-1)^2 < 4\left(1-\frac{a}{3}\right).$$

Задача 2. Докажите, что для любых действительных чисел одного знака a_1, a_2, ..., a_n, которые больше -1, имеет место неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant$$

$$\geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Когда достигается равенство?



Задача 3. Докажите, что если $n \geqslant 2$ и a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, S — их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Задача 4. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, которые удовлетворяют условию $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n = a$, имеет место неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{a})^n.$$

Задача 5. Действительные числа a_1, a_2, ..., a_n удовлетворяют условию $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$. Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее из этих чисел. Докажите, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \leqslant -nmM.$$

Задача 6. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Задача 7. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$$

при $0 \leqslant a_k \leqslant 1$, $k=1, 2, \ldots, n$.