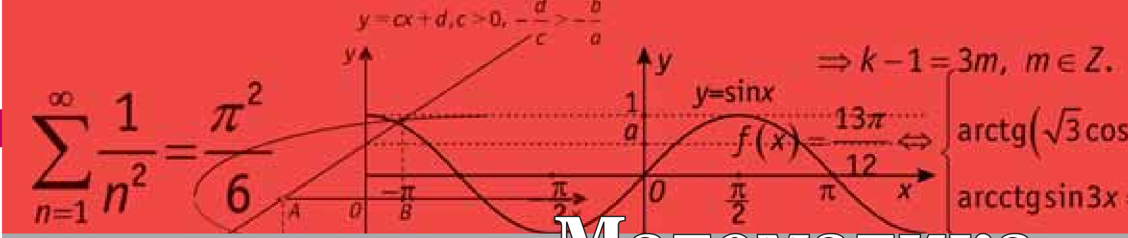

Пукас Юрий Остапович
Учитель математики МОУ «Гимназия города Троицка» Московской области.

Дюжина полезных задач с целыми числами

Задачи олимпиадного типа на свойства целых чисел могут на первый взгляд показаться мудрёными, однако их решения, порою очень трудно находимые, понятны и интересны многим. А ведь с каждой решённой или разобранной задачей приобретается какой-то новый опыт, расширяется арсенал технических приёмов. В этой статье мы разберём несколько интересных олимпиадных задач.

1. Каково наименьшее возможное значение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел (a^3b-ab^3) и (c^3-c) при целых a, b и c? (Олимпиада мехмата МГУ, 2009, 10 класс, первая в варианте.)

Заметим, что натуральное число $c^3-c=(c-1)c(c+1)\geq 6$ и делится на 6, так как среди трёх подряд идущих целых чисел одно обязательно делится на 3, а одно – на 2. Но ведь и натуральное число $a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$ делится на 6! В этом несложно убедиться: ведь если оба числа a и b – нечётные, то чётными будут их сумма и разность, если же они не делятся на 3, то на 3 будет делиться либо их сумма, либо их разность. Поэтому при целых a, b и c наименьшее возможное значение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел (a^3b-ab^3) и (c^3-c) равно шести.

2. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2008. Над ними последовательно проделывают 2007 операций, причём n-я по счёту операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $a+b-n$. Что останется на доске в конце? (А.С. Зеленский, Олимпиада мехмата МГУ, 2008, 8 класс.)

Сумма всех чисел на доске, первоначально равная $1+2+3+...+2008$, последовательно уменьшается на 1, 2, 3, ..., 2007. Поэтому, когда на доске останется только одно число, оно будет равно 2008.

3. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2008. Над ними последовательно проделывают 2007 операций, причём

n-я по счёту операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $(a \cdot b)/n$. Что останется на доске в конце? (А.С. Зеленский, Олимпиада мехмата МГУ, 2008, 9 класс.)

Произведение всех чисел на доске, первоначально равное 2008!, делится последовательно на 1, 2, 3, ..., 2007. После 2007 операций на доске останется одно число, и оно будет равно (2008!) : (2007!) = 2008.

Обратите внимание, что в одном варианте – сложение чисел, а в другом – умножение и деление. Такое разделение по вариантам мы встретим и в двух следующих задачах!

4. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 9, 10, ..., 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? (ЕГЭ-2010, Дальний Восток.)

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, максимальную сумму получим, расставив плюсы перед всеми произведениями: $S_{\max} = (2+3+ \ldots +7)\cdot(9+10+\ldots+17) = 3159$. Заметим, что это число нечётное, поэтому, как бы мы ни расставляли знаки, сумма 54-х произведений будет нечётной. Действительно, поменяв знак перед любым слагаемым, равным k, мы изменим сумму на величину $2k$, чётность результата при этом не изменится. Поэтому

$$S_{\min} = 1 = (2+3+4+5-6-7)\times$$
$$\times(9+10+11-12-13+14+15-16-17).$$

Нужную расстановку знаков перед произведениями мы получим, раскрыв скобки.

5. Перед каждым из чисел 11, 12, ..., 19 и 1, 2, ..., 7 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 63 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? (ЕГЭ-2010, Московский регион.)

Как и в предыдущей задаче, максимальную сумму получим, расставив плюсы перед всеми числами первого набора и минусы перед всеми числами второго набора. Но эта задача хитрее! Во-первых, при подсчёте надо быть аккуратными: каждое число первой группы учитывается 7 раз, а каждое число второй группы – 9 раз.

$$S_{\max} = 7\cdot(11+12+\ldots+19)-$$
$$-9\cdot(-1-2-\ldots-7) = 7\cdot 135 + 9\cdot 28 = 1197.$$

Во-вторых, установив, что результат не может быть нулём, труднее получить единицу:

$$S_{\min} = 7\cdot(-11-12+13-14+$$
$$+15-16-17+18+19)-$$
$$-9\cdot(-1+2+3-4-5-6+7) =$$
$$= 7\cdot(-5) - 9\cdot(-4) = 1.$$

6. При каких натуральных n существует рациональное число x, удовлетворяющее равенству $n^2+2=(2n-1)^x$?

(Диагностическая работа МИОО от 2.12.2008 – Четвёртая Соросовская олимпиада, 1998.)

Идея решения этой задачи пришла в голову довольно быстро: (n^2+2) должно делиться на $(2n-1)$. После этого легко удалось и завершить решение.

1. Из того, что при всех n выполняется $(n^2+2)>(2n-1)$, следует, что искомое число $x=k/m$ больше единицы: $k>m$.

2. Для чисел, удовлетворяющих условию задачи, равенство $(n^2+2)^m=(2n-1)^k$ определяет натуральное число, единственным образом разлагаемое на простые множители. Это значит, что в разложении на простые множители числа $(2n-1)$ присутствуют все простые множители числа (n^2+2), но в меньших степенях. Поэтому (n^2+2) делится на $(2n-1)$.

3. Следовательно, $n^2+2=d(2n-1)$, где d – натуральное число. Рассмотрим квадратное уравнение относительно n:

$$n^2-2dn+(d+2)=0.$$

Его дискриминант, делённый на 4, должен быть квадратом натурального числа, которое обозначим j (убеждаемся, конечно, что при равном нулю дискриминанте чисел, удовлетворяющих исходному равенству, нет): $d^2-d-2=j^2$. Тогда $(d-j)(d+j)=d+2$. Но $j=1$ не даёт нам натурального d, и следовательно, натурального n. При $j=2$ имеем $d=3$, откуда находим, что $n=5$, $x=1{,}5$ (при $n=1$, втором корне квадратного уравнения, исходное уравнение не имеет решений).

Если $j>2$, то левая часть равенства $(d-j)(d+j)=d+2$ больше правой, так как само $d+j>d+2$, да ещё умножается на $(d-j)$. То есть для $j>2$ равенство $(d-j)(d+j)=d+2$ невозможно.

Итак, лишь при $n=5$ исходное уравнение имеет рациональный корень.

А вот другой вариант завершения решения этой задачи, возможно, более простой.

Вернёмся в начало пункта 3. Найдём, при каких натуральных значениях n выражение $(n^2+2)/(2n-1)$ является натуральным числом, мы его уже обозначили буквой d. Задачи с подобными формулировками можно встретить, например, в «Сборнике задач по алгебре. 8–9» М.Л. Галицкого и др. там, где объясняется деление уголком. Умножим числитель на 4. Если d – натуральное число, то $4d$ – также натуральное. Могут появиться лишние решения, но мы сделаем проверку! Зато теперь удобнее делить уголком, выделяя целую часть:

$$(4n^2+8)/(2n-1)=(2n+1)+9/(2n-1).$$

Получаем остаток 9, который должен делиться на $(2n-1)$, откуда следует, что $(2n-1)$ – это либо 1, либо 3, либо 9. Находим три значения n (это 1, 2 и 5), нам подходит только $n=5$.

7. Функция $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, причём $f(-4)=3$, $19 \le f(3) \le 29$. Вычислить $f(16)$, если известно, что это значение принадлежит отрезку [600; 1100]. (Олимпиада МИРЭА, 2007.)

Нетрудно показать, что для многочлена с целыми коэффициентами разность $f(k)-f(m)$ при целых k и m делится на $(k-m)$. Действительно, при вычитании свободные члены сокращаются, а для любой натуральной степени n имеем $k^n - m^n = (k-m)\times$ $\times(k^{n-1}+k^{n-2}m+...+m^{n-1})$.

Поэтому $f(3)-f(-4)=f(3)-3$ делится на 7. В указанном для $f(3)$ промежутке находим единственное подходящее значение $f(3)=24$. Рассуждая таким же образом, получаем, что $f(16)-f(3)=f(16)-24$ делится на 13, а $f(16)-f(-4)=f(16)-3$ делится на 20. Это можно записать так: $f(16)=20k+3=13m+24$. Задача свелась к решению простейшего неопределённого уравнения первой степени, к задаче важной и полезной, но нетрудной. Итак, $13m=20k-21$; $m=(20k-21)/13=k+(7k-21)/13$. Выделение целой части! Общее решение этого уравнения: $k=3+13n$, откуда находим $m=3+20n$, $f(16)=$ $=20k+3=260n+63$. Из этих чисел условию $600 \le f(16) \le 1100$ удовлетворяет только значение $f(16)=843$.

8. Доказать, что если для некоторых натуральных n и m число n^2+m^2-n делится нацело на $2nm$, то n является квадратом натурального числа. (ВМК МГУ, устный экзамен, 2003.)

Пусть $(n^2+m^2-n)/(2mn)=k$, где k – натуральное число. Тогда $n^2+m^2-n=2nkm$, рассмотрим это как квадратное уравнение относительно m: $m^2-2nkm+(n^2-n)=0$. Его дискриминант, делённый на 4, должен быть квадратом целого числа, то есть:

$$n^2k^2-n^2+n=n(nk^2-n+1)=j^2.$$

Нетрудно заметить, что числа n и (nk^2-n+1) – положительные и взаимно простые, а их произведение должно быть квадратом, следовательно, каждое из них является квадратом натурального числа, в том числе и n. Что и требовалось доказать.

А теперь сравните это с решением следующей задачи, идейное сходство несомненно!

9. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^4-2y^2=1$. (В. Сендеров, Московская математическая олимпиада, 9 класс, 2002.)

Бросается в глаза формула сокращённого умножения. Можно также заметить, что x – нечётное число и что знаки x и y можно выбирать произвольно. Договоримся искать неотрицательные решения.

Пусть $x=2t+1$, тогда:

$$(x^4-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=$$
$$=2t(2t+2)(4t^2+4t+2)=2y^2.$$

Отсюда $4t(t+1)(2t^2+2t+1)=y^2$ и y – чётное число. Пусть $y=2z$, тогда $t(t+1)(2t^2+2t+1)=z^2$. Числа t, $(t+1)$ и $(2t^2+2t+1)=(2t(t+1)+1)$ попарно взаимно просты, а их произведение – полный квадрат. Отсюда следует, что каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t=0$, иначе $(t+1)$ не будет квадратом! Тогда и $z=0$, а дальше получаем, что $x=\pm1$, $y=0$.

10. Пусть a и b – различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a-b|>10000$. (Московская областная олимпиада, 10 класс, 2006.)

Для определённости будем считать, что $a>b$. Пусть $k=\text{НОД}(a,b)$ – наибольший общий делитель a и b. Тогда $a=km$, $b=kn$, где m и n – взаимно простые числа, причём $m>n$, поэтому $|a-b|=k(m-n)\geq k$. Докажем, что $k>10000$. Пока заметим, что если $k\leq10000$, то $m>n>100$.

Если $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ делится на ab, то (a^3+b^3) также делится на ab. В других обозначениях получаем, что $k^3(m^3+n^3)$ делится на k^2mn, или (km^3+kn^3) делится на mn. Но тогда (km^3+kn^3) должно делиться и на m, и на n. А так как m и n – взаимно простые числа, то k должно делиться и на m, и на n, и поэтому оно должно делиться на mn. Но мы уже знаем, что если $k\leq10000$, то $m>n>100$. В этом случае $mn>10000>k$, а меньшее число на большее нацело не делится. Тем самым мы доказали, что $|a-b|=k(m-n)\geq k>10000$.

11. У трёхчлена x^2-ax+b коэффициенты a и b – натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с 2,008... . Найдите наименьшее возможное значение a. (Московская областная олимпиада, 10 класс, 2008.)

Сначала несложным перебором убеждаемся, что при натуральных $a\leq4$ среди корней данного квадратного трёхчлена нет такого, чья десятичная запись начинается с 2,008... . Если же $a>4$, то корень, о котором идёт речь, это меньший корень. Пусть он равен $2+h$, где $0{,}008\leq h<0{,}009$. Тогда второй (больший) корень равен $a-2-h$, или $n-h$, где $n=a-2$. По теореме Виета произведение корней данного нам квадратного трёхчлена равно натуральному числу b, то есть $b=(2+h)(n-h)$. Абсцисса вершины параболы $y=x^2-ax+b$ равна $\frac{2+n}{2}$. Все такие параболы получаются из некоторых графиков семейства $y=x^2-(2+n)x+2n$ (n – натуральное) прибавлением натурального числа k, это чуть «приподнимает» их, и получается в итоге $y=x^2-(2+n)x+(2n+k)$. То есть $a=2+n$ и $b=2n+k$.

Нас интересуют такие значения k и n, чтобы меньший корень x_1 квадратного уравнения $x^2-(2+n)x+2n+k=0$ удовлетворял условию $2{,}008\leq x_1<2{,}009$. Причём k и n должны быть такими, чтобы значение n было минимальным, ведь $a=n+2$. Достаточно найти минимальное значение n, при котором $x_1<2{,}009$ и сделать проверку, решив при найденных значениях n и k уравнение $x^2 - -(2+n)x+2n+k=0$, чтобы посмотреть на десятичную запись корня x_1.

Решая неравенство $2x_1 < 4{,}018$, или

$$2+n-\sqrt{n^2-4n+4-4k} < 4{,}018,$$

получим оценку:

$$0{,}036n > 4k-4+(2{,}018)^2.$$

Отсюда видно, что минимальное значение n мы найдём при $k=1$. Получаем: $n > 113{,}12...$, минимальное целое значение $n=114$, $a=116$, $b=229$. При этих значениях $x_1 = 2{,}0089...$.

Таким образом, решению этой задачи помогло рассмотрение квадратного трёхчлена $y=x^2-(2+n)x+2n$ вместо $y=x^2-ax+b$.

12. У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами. (И.В. Ященко, Московская математическая олимпиада, 8 класс, 2004.)

Аналогичную задачу предложили и девятиклассникам, только в их задаче «операцию повторили девять раз». Многие участники догадались привести пример такого квадратного уравнения с натуральными p и q, взяв коэффициент p в виде $p=q+1$, тогда получается уравнение $x^2+(q+1)x+q= =0$, корни которого $x_1=-1$, $x_2=-q$.

Приведём здесь также авторский комментарий к решению: «Увеличение коэффициентов p и q на единицу означает прибавление $x+1$ к исходному трёхчлену. Пусть один из корней данного уравнения -1, а второй – целый. Тогда при прибавлении $x+1$ корень -1 будет сохраняться, а второй корень будет уменьшаться на 1».

Новости Новости Новости Новости Новости

Рекорд пористости вещества

Он достигнут на образцах металлоорганических структур (МОС), образующих класс твёрдых пористых веществ, называемых иногда кристаллическими губками. Благодаря большой пористости они обладают способностью собирать внутри себя значительные количества газа. Это их свойство учёные пытаются использовать для создания устройств, захватывающих двуоксид углерода (углекислый газ) ещё до его поступления из источника в атмосферу, т. е. защищающих её от техногенного загрязнения. Для этого нужно получить вещества с максимально возможной пористостью. В последние годы развернулись интенсивные их поиски.

Калифорнийцу Омару Янги и его южнокорейскому коллеге Хиро Фурукаве удалось получить две структуры (МОС-200 и МОС-210) с рекордной пористостью – превышающей до 10 раз пористость всех других МОС. Их лёгкие материалы могут образовывать тончайшие плёнки. Так, если 1 г МОС-200 «развернуть», то им, по словам Омара Янги, можно покрыть несколько футбольных полей. Неудивительно, что поры этого вещества собирают и хранят большое количество газа (водорода, метана, углекислого газа). Но для улавливания именно двуоксида углерода необходима ещё и высокая избирательность МОС. Сейчас идёт работа над тем, чтобы они обладали и этим свойством.