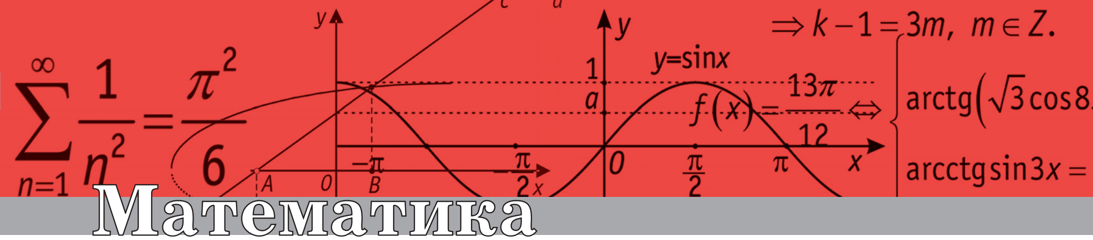

Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал», автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ», лауреат премии Правительства РФ 2020 года в области образования

Слишком много модулей

В сборнике [1] появилась новая задача 17.

Задача (вариант 7).

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{x^3}{3}\right|-|y+4x|=2y+\dfrac{x^3}{3}+4x, \\ |-y-4x+1|-\left|y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right|=-3y-8x-\dfrac{x^3}{3}+d+1 \end{cases} \quad (1)$$

имеет единственное решение.

(Заметим сразу, что у нас последнее слагаемое во 2-ой строчке – это +1 , а в [1] – это −1.)

При решении лучше воспользоваться не самым распространённым методом «раскрытия» модулей, которых в условии задачи 4. Задачу, без сомнения, можно решить и по-другому, стандартным раскрытием модулей.

Так как метод не всем встречался, будем делать всё подробно – поэтому может показаться, что решение этим методом громоздко. Но решение задачи 3 в конце убедит читателя в обратном.

Решение.

Прежде всего заметим, что одинаковые выражения встречаются по два раза, иногда под знаком модуля как-то не очень обычно y входит со знаком минус, а также всегда $|u|-u\geq 0$.

Поэтому сначала «причешем» систему:

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{x^3}{3}\right|-|y+4x|=2y+\dfrac{x^3}{3}+4x=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)+(y+4x), \\ |-y-4x+1|-\left|y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right|=-\left(y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right)+2(-y-4x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+\dfrac{x^3}{3}\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)=|y+4x|+(y+4x),\\ \left|y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right)=|y+4x-1|+2(y+4x-1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+\dfrac{x^3}{3}\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)=|y+4x|+(y+4x),\\ \left|y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}-d+1\right)=3(y+4x-1).\end{cases}$$

Попробуем решить более общую систему:

$$\begin{cases}\left|y+\dfrac{x^3}{c^2}\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{c^2}\right)=\left|y+4\alpha^2x\right|+\left(y+4\alpha^2x\right),\\ \left|y+\dfrac{x^3}{c^2}-d+1\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{c^2}-d+1\right)=\left(2+b^2\right)\left(y+4\alpha^2x-1\right),b^2\neq 0.\end{cases}$$

Чтобы поменьше писать, введём обозначения:

$$u=y+\frac{x^3}{c^2},v=y+3\alpha^2x,d-1=a,c>0,\alpha>0.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases}|u|-u=|v|+v\geq 0,\\ |u-a|-(u-a)=\left(2+b^2\right)(v-1),b^2\neq 0.\end{cases}\qquad(1)$$

Часть первая. Решение систем уравнений (1)

Рассмотрим различные случаи.

I. Пусть $u\geq 0$.

Тогда

$$\begin{cases}u\geq 0,\\ |u|-u=|v|+v\geq 0,\\ |u-a|-(u-a)=\left(2+b^2\right)(v-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\geq 0,\\ 0=|v|+v\Leftrightarrow v\leq 0,\\ |u-a|-(u-a)=\left(2+b^2\right)(v-1)\geq 0\Rightarrow v\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$$

II. Теперь пусть $u<0$.
Тогда

$$\begin{cases} u<0, \\ |u|-u=|v|+v, \\ |u-a|-(u-a)=\left(2+b^2\right)(v-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u<0, \\ -2u=|v|+v>0 \Rightarrow v>0 \Rightarrow |v|+v=2v \Rightarrow -u=v, \\ |u-a|-(u-a)=-\left(2+b^2\right)(u+1) \end{cases}$$

Опять рассмотрим две ситуации.

а) Пусть $u-a\ge 0$.
Тогда

$$\begin{cases} -u=v>0, \\ u-a\ge 0, \\ |u-a|-(u-a)=-\left(2+b^2\right)(u+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u=v>0, \\ u-a\ge 0 \\ 0=-\left(2+b^2\right)(u+1) \Leftrightarrow u=-1=-v \Rightarrow -1-a\ge 0 \Leftrightarrow a\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -1, \\ u=-1, \\ v=1, \\ b - \textit{любое} \end{cases}$$

b) Пусть теперь $u-a<0$.
Тогда

$$\begin{cases} -u=v, \\ u-a<0, \\ |u-a|-(u-a)=-\left(2+b^2\right)(u+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u=v>0, \\ -2(u-a)=-\left(2+b^2\right)(u+1)>0 \Leftrightarrow u=-\dfrac{b^2+2a+2}{b^2}<0 \\ u-a<0 \Rightarrow -\dfrac{b^2+2a+2}{b^2}-a<0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(b^2+2\right)+\left(2+b^2\right)a}{b^2}>0 \Leftrightarrow a>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ u=-1-\dfrac{2(a+1)}{b^2}, \\ v=1+\dfrac{2(a+1)}{b^2}, b\ne 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ u=-1-\dfrac{2(a+1)}{b^2}, \\ v=1+\dfrac{2(a+1)}{b^2}, b\ne 0. \end{cases}$$

Итак, система решена:

$$\begin{cases}|u|-u=|v|+v\ge 0,\\ |u-a|-(u-a)=\left(2+b^2\right)(v-1),b^2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}a\le -1,\\ u=-1,\\ v=1,\\ b-\textit{любое};\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}a>-1,\\ u=-1-\dfrac{2(a+1)}{b^2},\\ v=1+\dfrac{2(a+1)}{b^2},b\ne 0\end{cases} & (3)\end{array}\right.$$

Часть вторая. Исследование функции

$$y=x^3-3\beta^2x+2\beta^3,\ \ \beta>0.$$

Заметим, что

$$y=x^3-3\beta^2x+2\beta^3=(x-\beta)^2(x+2\beta)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\beta,\\ x=-2\beta.\end{array}\right.$$

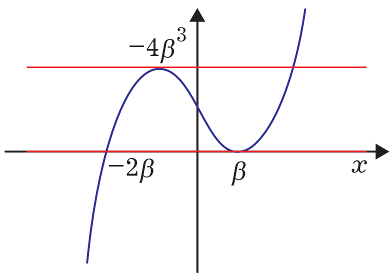

Рис. 1

Из рис.1 следует, что уравнение

$$x^3-3\beta^2x+2\beta^3=m$$

a) имеет единственное решение, если $m<0$ или $m>4\beta^3$ (4)

b) имеет не менее 2 решений, если $0\le m\le 4\beta^3$ (5)

Часть третья. Заключительная

Теперь в системы (2) и (3) подставим $u=y+\dfrac{x^3}{c^2}, v=y+3\alpha^2x$ и выясним, когда получившиеся системы имеют единственное решение.

1) Рассмотрим сначала систему (2).

$$\begin{cases} a \le -1, \\ u = -1, \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le -1, \\ y + \dfrac{x^3}{c^2} = -1, \\ y + 3\alpha^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \le -1, \\ y = 1 - 3\alpha^2 x, \\ \dfrac{x^3}{c^2} - 3\alpha^2 x = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3\alpha^2 c^2 x + 2\alpha^3 c^3 = -2c^2 + 2\alpha^3 c^3 \Leftrightarrow \\ (x - \alpha c)^2 (x + 2\alpha c) = 2c^2 \left(\alpha^3 c - 1\right) \end{cases} \tag{6}$$

Из второго уравнения видно: сколько х-ов, столько же у-ков. Для единственности решения системы осталось найти a, при которых второе уравнение имеет единственное решение.

Рассмотрим его отдельно.

Из (4) следует, что решение уравнения

$$(x - \alpha c)^2 (x + 2\alpha c) = 2c^2 \left(\alpha^3 c - 1\right)$$

единственно, если $c\alpha^3 < 1$, а из (4) и (6) следует, что решение системы

$$\begin{cases} a \le -1, \\ y + \dfrac{x^3}{c^2} = -1, \\ y + 3\alpha^2 x = 1 \end{cases} \tag{6}$$

единственно, если выполнены условия

$$\begin{cases} a \le -1, \\ c\alpha^3 < 1 \end{cases} \tag{7}$$

2) Теперь рассмотрим систему (3)

$$\begin{cases} a > -1, \\ u = -1 - \dfrac{2(a+1)}{b^2}, \\ v = 1 + \dfrac{2(a+1)}{b^2}, b \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -1, \\ y + \dfrac{x^3}{c^2} = -1 - \dfrac{2(1+a)}{b^2}, \\ y + 3\alpha^2 x = 1 + \dfrac{2(1+a)}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a>-1,\\ y=-3\alpha^2x+1+\dfrac{2(1+a)}{b^2},\\ \dfrac{x^3}{c^2}-3\alpha^2x=-2-\dfrac{4(1+a)}{b^2}\Leftrightarrow x^3-3\alpha^2c^2x+2\alpha^3c^3=\\ 2c^2\left(\alpha^3c-1\right)-\dfrac{4c^2(1+a)}{b^2}\end{cases} \qquad (8)$$

Из (4) следует, что решение уравнения

$$x^3-3\alpha^2c^2x+2\alpha^3c^3=2c^2\left(\alpha^3c-1\right)-\frac{4c^2(1+a)}{b^2}<0$$

единственно, если $2c^2\left(\alpha^3c-1\right)-\dfrac{4c^2(1+a)}{b^2}<0\Leftrightarrow a>\dfrac{b^2\left(\alpha^3c-1\right)}{2}-1$,

а из (4) и (8) следует, что решение системы

$$\begin{cases} a>-1,\\ y+\dfrac{x^3}{c^2}=-1-\dfrac{2(1+a)}{b^2},\\ y+3\alpha^2x=1+\dfrac{2(1+a)}{b^2}\end{cases}$$

единственно, если выполнены условия

$$\begin{cases} a>-1,\\ a>\dfrac{b^2\left(c\alpha^3-1\right)}{2}-1\end{cases} \qquad (9)$$

Вот и всё!

Теперь можно записать Ответ к любой задаче из вариантов 6-8 сборника [1].

Например, выпишем Ответ к задаче, сформулированной в начале статьи:

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{x^3}{3}\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)=|y+4x|+(y+4x),\\ \left|y+\dfrac{x^3}{3}-d\right|-\left(y+\dfrac{x^3}{3}-d\right)=3(y+4x-1)\geq 0\end{cases}$$

$$c^2=3,\alpha^2=\frac{4}{3},b^2=1$$

Поэтому система имеет единственное решение, если выполнены условия

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}d\le -1,\\ c\alpha^3<1;\end{cases}\\ \begin{cases}d>-1,\\ d>\dfrac{b^2\left(c\alpha^3-1\right)}{2}-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}d\le -1\Leftrightarrow a-1\le -1\Leftrightarrow a\le 0,\\ \sqrt{3}\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}}<1\Leftrightarrow\dfrac{8}{3}<1-\textit{неверно}\Rightarrow\varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}d>-1,\\ d>\dfrac{\left(\dfrac{8}{3}-1\right)}{2}-1=\dfrac{5}{6}-1\Rightarrow a-1>\dfrac{5}{6}-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow a>\frac{5}{6}$$

Ответ. $\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$.

Задача варианта 6.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left|y+x^3\right|-\left|y+3x\right|=2y+x^3+3x,\\ \left|-y-3x+1\right|-\left|y+x^3-a\right|=-3y-6x-x^3+a+2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\left|y+x^3\right|-\left|y+3x\right|=2y+x^3+3x,\\ \left|-y-3x+1\right|-\left|y+x^3-a\right|=-3y-6x-x^3+a+2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+x^3\right|-\left|y+3x\right|=\left(y+x^3\right)+\left(y+3x\right),\\ \left|y+3x-1\right|-\left|y+x^3-a\right|=-2\left(y+3x-1\right)-\left(y+x^3-a\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+x^3\right|-\left(y+x^3\right)=\left|y+3x\right|+\left(y+3x\right),\\ \left|y+x^3-a\right|-\left(y+x^3-a\right)=\left|y+3x-1\right|+2\left(y+3x-1\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+x^3\right|-\left(y+x^3\right)=\left|y+3x\right|+\left(y+3x\right),\\ \left|y+x^3-a\right|-\left(y+x^3-a\right)=3\left(y+3x-1\right)\ge 0.\end{cases}$$

Здесь $\alpha^2=c^2=b^2=1$.

Поэтому система имеет единственное решение, если выполнены условия

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -1,\\ c\alpha^3<1;\end{cases}\\ \begin{cases}a>-1,\\ a>\dfrac{b^2\left(c\alpha^3-1\right)}{2}-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -1,\\ 1<1-\textit{неверно}\Rightarrow\varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}a>-1,\\ a>\dfrac{(1-1)}{2}-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow a>-1$$

Ответ. $(-1;+\infty)$.

Задача варианта 8

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left|y+\frac{x^3}{2}\right|-\left|y+\frac{3}{2}x\right|=2y+\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x,\\ \left|-y-\frac{3}{2}x+1\right|-\left|y+\frac{x^3}{2}-a\right|=-4y-\frac{9}{2}x-\frac{x^3}{2}+a+3\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Если методика освоена, можно решить третью задачу сборника «в лоб» и посмотреть, сколько времени и места потребуется.

Сначала преобразуем систему.

$$\begin{cases}\left|y+\frac{x^3}{2}\right|-\left|y+\frac{3}{2}x\right|=2y+\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x,\\ \left|-y-\frac{3}{2}x+1\right|-\left|y+\frac{x^3}{2}-a\right|=-\left(y+\frac{x^3}{2}-a\right)+3\left(-y-\frac{3}{2}x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+\frac{x^3}{2}\right|-\left(y+\frac{x^3}{2}\right)=\left|y+\frac{3}{2}x\right|+\left(y+\frac{3}{2}x\right),\\ \left|y+\frac{x^3}{2}-a\right|-\left(y+\frac{x^3}{2}-a\right)=\left|y+\frac{3}{2}x-1\right|+3\left(y+\frac{3}{2}x-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|y+\frac{x^3}{2}\right|-\left(y+\frac{x^3}{2}\right)=\left|y+\frac{3}{2}x\right|+\left(y+\frac{3}{2}x\right),\\ \left|y+\frac{x^3}{2}-a\right|-\left(y+\frac{x^3}{2}-a\right)=4\left(y+\frac{3}{2}x-1\right)\geq 0.\end{cases}$$

Пусть $y+\frac{x^3}{2}=u, y+\frac{3}{2}x=v.$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}|u|-u=|v|+v,\\ |u-a|-(u-a)=4(v-1).\end{cases}$$

Рассмотрим случаи.

I. $u\geq 0\Rightarrow\begin{cases}0=|v|+v\Leftrightarrow v\leq 0,\\ |u-a|-(u-a)=4(v-1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$

II. $u<0\Rightarrow\begin{cases}-2u=2v,\\ |u-a|-(u-a)=-4(u+1).\end{cases}$

И опять два случая.

$$\text{a)}\ u-a\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} -u=v, \\ 0=-4(u+1) \Leftrightarrow u=-1 \Rightarrow -1-a\ge 0 \Leftrightarrow a\le -1, v=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\le -1, \\ y+\dfrac{x^3}{2}=-1, \\ y+\dfrac{3}{2}x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -1, \\ y=-\dfrac{3}{2}x+1, \\ \dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{2}x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -1, \\ y=-\dfrac{3}{2}x+1, \\ x^3-3x=-4 \Leftrightarrow x^3-3x+2=-4+2 \Leftrightarrow \\ (x+2)(x-1)^2=-2<0-\text{один корень} \end{cases} \Rightarrow a\le -1$$

$$\text{b)}\ u-a<0 \Rightarrow \begin{cases} -u=v, \\ -2(u-a)=-4(u+1) \Leftrightarrow u=-2-a \Rightarrow -2-a-a<0 \Leftrightarrow a>-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+\dfrac{x^3}{2}=-2-a, \\ y+\dfrac{3}{2}x=2+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+\dfrac{3}{2}x=2+a, \\ x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2=-8-4a+2<0 \Leftrightarrow a>-\dfrac{3}{2} \Rightarrow a>-1 \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty;+\infty)$

Проверим по системам (7) и (9):

$$c^2=2, \alpha^2=\frac{1}{2}, b^2=2$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\le -1, \\ c\alpha^3<1; \end{cases} \\ \begin{cases} a>-1, \\ a>\dfrac{b^2\left(c\alpha^3-1\right)}{2}-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\le -1, \\ \sqrt{2}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}<1-\text{верно}; \end{cases} \\ \begin{cases} a>-1, \\ a>\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}-1\right)}{2}-1=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in R$$

С ответом в сборнике не совпадает.

Вариант 6

$$\begin{cases} \left|y+x^3\right|-\left|y+3x\right|=2y+x^3+3x, \\ \left|-y-3x+1\right|-\left|y+x^3-a\right|=-3y-6x-x^3+a+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\le -1, \\ y+\dfrac{x^3}{2}=-1, \\ y+\dfrac{3}{2}x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -1, \\ y=-\dfrac{3}{2}x+1, \\ \dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{2}x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|y+x^3\right|-\left(y+x^3\right)=\left|y+3x\right|+\left(y+3x\right), \\ \left|y+x^3-a\right|-\left(y+x^3-a\right)=\left|y+3x-1\right|+2\left(y+3x-1\right) \end{cases}$$

$y+x^3=u.\ y+3x=v$

$$\begin{cases} |u|-u=|v|+v\ge 0, \\ |u-a|-(u-a)=|v-1|+2(v-1)\ge 0 \Rightarrow v-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|-u=|v|+v\ge 0, \\ |u-a|-(u-a)=3(v-1). \end{cases}$$

1) $\begin{cases} u\ge 0 \Rightarrow |u|-u=|v|+v \Leftrightarrow |v|+v=0 \Leftrightarrow v\le 0, \\ |u-a|-(u-a)=3(v-1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

2) $\begin{cases} u<0 \Rightarrow |v|+v>0 \Rightarrow v>0 \Rightarrow |u|-u=|v|+v \Leftrightarrow -u=v, \\ |u-a|-(u-a)=3(v-1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} u<0, -u=v, \\ |u-a|-(u-a)=3(v-1) \end{cases}$

$a)\, u-a\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} u<0, -u=v, \\ 0=3(v-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1, \\ u=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+3x=1, \\ y+x^3=-1 \end{cases} \Rightarrow$

$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow \varnothing$, *т.к. два корня*

b) $u-a<0 \Rightarrow \begin{cases} u<0, -u=v, \\ |u-a|-(u-a)=3(v-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u<a, -u=v, \\ -2(u-a)=3(v-1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u<a, -u=v, \\ -2(u-a)=3(-u-1) \Leftrightarrow u=-3-2a<a \Rightarrow a>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ u=-3-2a, \Rightarrow \\ v=3+2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>-1, \\ y+x^3=-3-2a, \\ y+3x=3+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ y+3x=3+2a, \\ x^3-3x+2=-6-4a+2<0, \end{cases} \Rightarrow a>-1.$$

Ответ. $(-1;+\infty)$.

Литература

1. Математика. Профильный уровень. Типовые варианты экзаменационных заданий. Под редакцией *И.В. Ященко.*// Изд. "Экзамен", М., 2022.