

Петрашев Владимир Иванович

Старший преподаватель кафедры высшей математики
Белгородского государственного технологического
университета БГТУ им. В. Г. Шухова

Незабытые решенные задачи – ключ к решению грядущих

Каждая новая теорема, подаренная нам школьными учебниками геометрии, расширяет наши представления о свойствах геометрических объектов, а следовательно, и возможности решения различных по содержанию и сложности задач. Решая задачи, мы можем получить новые, иногда почти очевидные, а иной раз и неожиданные следствия. Такие задачи авторы учебников обычно особо выделяют, называя базовыми или применяя специальные обозначения (например, «ключики»), указывая тем самым, что их решения применяются в дальнейшем. Следуя этим указаниям, хорошо бы приучить себя возвращаться к условию после решения задачи и отмечать что-то интересное для бу-

дущей работы. Надеемся, что предлагаемая цепочка задач убедит читателя в пользу такой привычки.

Задача 1. Отрезок, соединяющий вершину B треугольника ABC с точкой K на стороне AC , делит эту сторону на части: $AK = m$, $KC = n$. Каково отношение площадей треугольников BAK и BCK (см. рис. 1)?

Решение. Так как высота $BD = h$ треугольника ABC , общая также для треугольников BAK и CBK , то

$$S_{\triangle BAK} = \frac{1}{2}mh = S_1, \quad S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2}nh = S_2.$$

Поэтому $\frac{S_{\triangle BAK}}{S_{\triangle BCK}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$ (отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению длин их оснований).

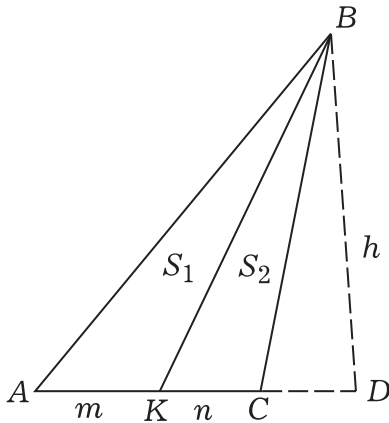


Рис. 1

Следствие. Если BK – медиана треугольника ABC , то она делит его на два равновеликих. Действительно, основания у них одинаковы $m=n$, высота общая h , поэтому $S_1 = S_2$.

Теперь, если при изучении теоремы о площади треугольника, равной половине произведения длин его сторон на синус угла между ними, вы вспомните задачу 1, то сразу получите важное свойство биссектрисы угла треугольника (см. рис. 2)

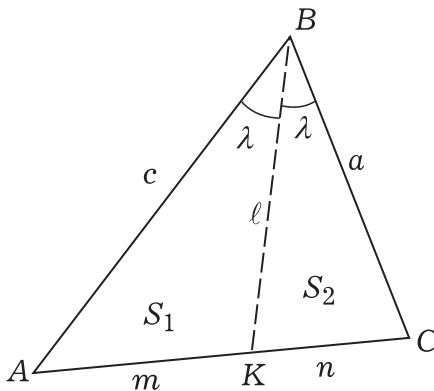


Рис. 2

$S_1 = \frac{1}{2}cl \sin \lambda$, $S_2 = \frac{1}{2}al \sin \lambda$, отсюда: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{c}{a}$. А согласно задаче 1.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$, поэтому $\frac{m}{n} = \frac{c}{a}$ – биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорционально прилежащим сторонам.

Задача 2. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ делят ее на четыре треугольника, площади которых обозначены на рис.3. Тогда: а) докажите, что $S_3 = S_4$; б) если известны площади S_1 и S_2 , найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение а) У треугольников ABC и DBC сторона BC общая, высоты этих треугольников, проведенные к этой стороне, одинаковы и равны высоте трапеции. Поэтому $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$. Вычитая из площадей этих треугольников площадь их общей части S_1 , получаем $S_3 = S_4$.

Решение б) Вспомнив задачу 1, заметим, что $\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD}$. Так как треугольники BOC и DAO подобны по двум соответственно равным углам: BOC и AOD – вертикальные, BCO и DAO – накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC , то по теореме об отношении площадей подобных фигур $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{BO}{OD}\right)^2$.

Отсюда: $\frac{BO}{OD} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$. Тогда

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \quad S_4 = \sqrt{S_1 S_2}. \quad \text{Поэто-}$$

му, согласно а) и $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 S_2}$.

Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

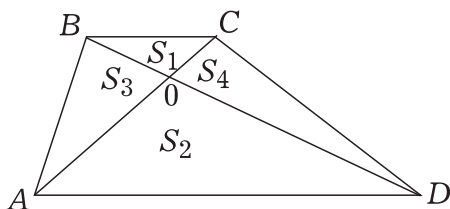


Рис. 3

В настоящее время учителя, да и школьники тоже, имеют благодаря разнообразию учебников математики широкие возможности выбирать для своей работы различные по тематике и сложности задачи, а также способы доказательства теорем. А мы используем задачу 1. и следствие из нее для ещё одного обоснования свойства пересечения трех медиан треугольника в одной точке.

В треугольнике ABC (рис. 4) проведем медианы BM и CN , пересекающиеся в точке O . Соединим эту точку с вершиной A . Так как OM – медиана треугольника AOM , то площади треугольников AOM и $МОС$ равны S_1 , ON – медиана треугольника AOB , поэтому

$$S_{\triangle AON} = S_{\triangle NOB} = S_2.$$

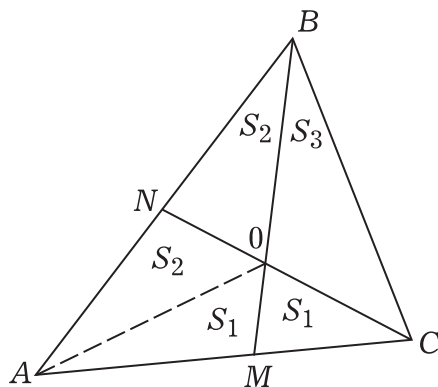


Рис. 4

Обозначим $S_{\triangle BOC} = S_3$.

Медиана BM делит треугольник ABC на два равновеликих: $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BCM}$, то есть $2S_2 + S_1 = S_3 + S_1$.

Отсюда $S_3 = 2S_2$. Аналогично ме-

диана CN делит на два равновеликих треугольника $S_{\triangle BCN} = S_{\triangle ACN}$,

$S_2 + S_3 = S_2 + 2S_1$, отсюда $S_3 = 2S_1$.

Следовательно, $S_3 = 2S_2 = 2S_1$, то есть $S_1 = S_2$. Далее, треугольник

AMB отрезком AO делится на треугольники AOB и AOM , а

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOM}} = \frac{2S_2}{S_2} = \frac{BO}{OM} = 2:1.$$

Треугольник NBC отрезком BO делится на треугольники BCO и

BNO , а $\frac{CO}{ON} = \frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle BNO}} = \frac{S_3}{S_2} = 2:1$. Зна-

чит, обе медианы BM и CN точкой пресечения делятся в отношении $2:1$, считая соответственно от вершин B и C . Аналогично, проведя вместе с медианой BM медиану треугольника ABC из вершины A , убе-

димся, что она тоже проходит через точку O . То есть все три медианы пересекаются в одной точке, и каждая из них делится ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Задача 3. Стороны четырехугольника $ABCD$ продолжили так, что $AB = BB_1$, $BC = CC_1$, $CD = DD_1$, $DA = AA_1$. Во сколько раз площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ больше площади четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 5)?

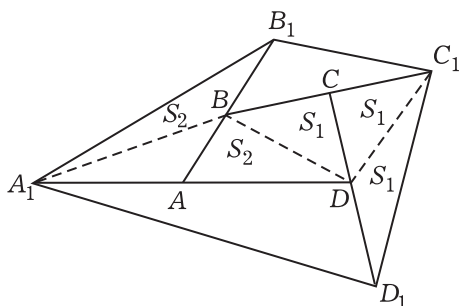


Рис. 5

Решение. Проведем диагональ BD , которая разбивает четырехугольник $ABCD$ на треугольники BCD и ABD с площадями S_1 и S_2 соответственно. Соединив точки D и C_1 , получим в треугольнике BDC_1 медиану DC , которая по следствию из задачи 1. делит его на два равновеликих с площадями S_1 каждый. А в треугольнике CC_1D_1 медиана C_1D делит его на два равновеликих с такими же площадями S_1 . Аналогично, проведя A_1B , медиану треугольника A_1AB_1 , получим два рав-

новеликих A_1AB и A_1BB_1 с площадями S_2 . Таким образом, сумма площадей треугольников A_1AB_1 и CC_1D_1 равна $2S_1 + 2S_2 = 2(S_1 + S_2)$ – две площади четырехугольника $ABCD$. Аналогично, проведя диагональ AC , отрезки B_1C и D_1A получим, что сумма площадей треугольников A_1DD_1 и BB_1C_1 также равна удвоенной площади четырехугольника $ABCD$. Следовательно, сумма площадей всех треугольников, прилежающих к $ABCD$, в 4 раза больше его площади. Плюс еще сам этот четырехугольник входит в $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} = 5S_{ABCD}$.

Задача 4. В треугольнике ABC биссектриса AM и медиана BN пересекаются в точке O . Площади треугольников ABM и MNC равны S . Чему равен угол AON (см. рис. 6)?

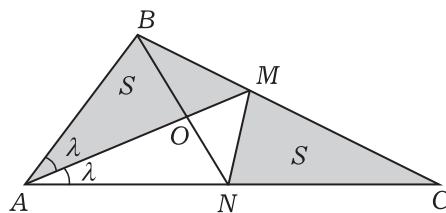


Рис. 6

Решение. По условию $AN = NC$, поэтому MN – медиана треугольника AMC , а по следствию из задачи 1. $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle MNC} = S$. Следовательно, $S_{\triangle ABM} : S_{\triangle AMC} = S : 2S = \frac{1}{2} = BM : MC$. Так как AM – биссектриса, то по её свойству $BM : MC = AB : AC = \frac{1}{2}$. Сле-

довательно $AB = \frac{1}{2}AC = AN$, и треугольник ABN – равнобедренный. Поэтому его биссектриса AM является и высотой, а угол $AON = 90^\circ$.

Задача 5. На стороне AB треугольника ABC выбрали точку N так, что $AN:BN=1:2$. На стороне AC взяли точку K так, что отрезки CN и BK пересекаясь в точке O , делят BK в отношении $BO:OK=5:2$. Найдите отношение $AK:KC$ (см. рис. 7).

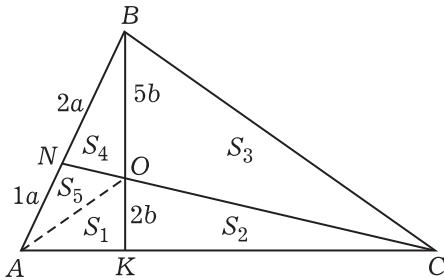


Рис. 7

Решение. Проведем отрезок AO , а площади образовавшихся треугольников обозначим, как на рис. 7. Согласно следствию из задачи 1. искомая величина $AK:KC$ равна отношению площадей треугольников

AOK и KOC : $\frac{S_1}{S_2} = x$. Аналогично

$$\frac{S_4}{S_5} = \frac{2}{1}; \frac{S_3}{S_2} = \frac{5}{2}.$$

Отсюда $S_4 = 2S_5$, $S_3 = \frac{5}{2}S_2$. Подставляя вместо S_4 и S_3 эти их выражения в пропорцию

$\frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2 + S_5} = \frac{2}{1}$, которая получена из отношения площадей треугольников BNC и ANC , получим:

$$\frac{\frac{5}{2}S_2 + 2S_5}{S_1 + S_2 + S_5} = 2. \quad (1)$$

Теперь найдем отношение площадей треугольников AOB и AOK : $\frac{S_4 + S_5}{S_1} = \frac{5}{2}$ и воспользуемся еще раз

тем, что $S_4 = 2S_5$, получим $\frac{3S_5}{S_1} = \frac{5}{2}$

или $S_5 = \frac{5}{6}S_1$. Подставив это выражение S_5 в (1), получим

$$\frac{\frac{5}{2}S_2 + 2 \cdot \frac{5}{6}S_1}{S_1 + S_2 + \frac{5}{6}S_1} = 2.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби в этом уравнении на S_2 , получим:

$$\frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} \frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2} + 1 + \frac{5}{6} \frac{S_1}{S_2}} = 2; \quad \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{3}x}{1 + \frac{11}{6}x} = 2;$$

$$x = AK:KC = 1:4.$$

Мы надеемся, уважаемый читатель, что, рассмотрев эти задачи в их последовательности и связи, вы согласитесь с простой и полезной, по нашему мнению, мыслью: решенные когда-то задачи, если они оставили след в памяти, способствуют в дальнейшем изучению и применению математики.