Миронова Татьяна Геннадьевна
Учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №67»

Мычка Евгений Юрьевич
Кандидат физико-математических наук ведущий научный сотрудник кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ. Выпускник СУНЦ МГУ 2002 года

Об одной задаче В.В. Вавилова

Статья посвящена одной из задач для исследования, предложенных В.В. Вавиловым в книге «Математические успехи школьников», а именно нахождению множества точек, являющихся вершинами треугольника с заданными центрами вписанной и описанной окружностей.

Одним из тех, кто работал в журнале «Потенциал» с момента его основания был Валерий Васильевич Вавилов, профессор кафедры математики и руководитель кабинета педагогического творчества СУНЦ МГУ. Заслуги этого талантливейшего человека можно перечислять очень долго, но для нас он был в первую очередь выдающимся учителем и преподавателем. На его уроках и лекциях царила удивительная атмосфера приближающегося открытия, которое, казалось, мог совершить каждый из присутствующих. Ученики выходили с его занятий буквально окрылённые новыми идеями. В.В. Вавилов оказал на нас, как и на многих других своих учеников, большое влияние. Эта статья – дань глубокого уважения и огромной благодарности нашему дорогому учителю.

В 2015 году В.В. Вавилов выпустил брошюру «Математические успехи школьников», в которой описал тематику и привёл аннотации некоторых докладов школьников на конференциях Колмогоровские и Харитоновские чтения, сделанных в разные годы, а также описал формулировки полученных математических результатов. Во второй части указанной брошюры были приведены формулировки задач, некоторые из которых были поставлены ещё Колмогоровым и ожидающие своих исследователей и решений. Одна из них, сформулированная В.В. Вавиловым, и привлекла наше внимание.

Задача. Найти геометрическое место точек плоскости, где могут находиться вершины треугольника ABC, при заданном центре I вписанной окружности и центре O описанной окружности.

Для начала отметим, что вершины треугольника ABC не могут находиться как внутри окружности W с центром в точке O и радиуса OI, так и на ней самой, так как центр вписанной окружности I лежит во внутренней области треугольника, а значит расстояние $OA = OB = OC = R$, где R – радиус описанной окружности, больше расстояния OI.

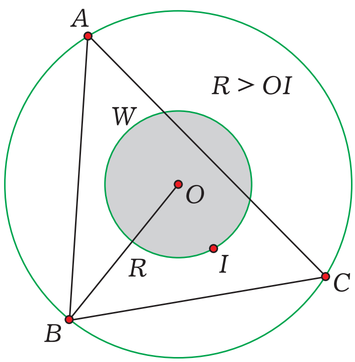

Рис. 1

Теперь возьмём за одну из вершин треугольника произвольную точку A, находящуюся за пределами указанной окружности, и покажем, как можно построить две другие вершины треугольника ABC, чтобы он был искомым.

Построение:

1. Построим окружность S с центром в точке O и радиуса OA;

2. Проведём луч AI до пересечения с окружностью S и обозначим точку пересечения M;

3. Построим окружность T с центром в точке M и радиуса MI, которая при пересечении с окружностью S определит точки B и C.

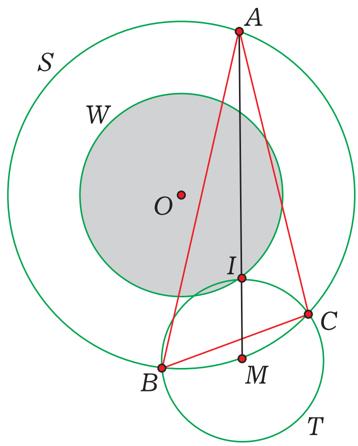

Рис. 2

Итак, по построению мы получили, что точки A, B и C лежат на окружности S с центром в точке O, доказав тем самым, что точка O действительно является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

Докажем теперь, что точка I – центр вписанной окружности полученного треугольника ABC. Так как по третьему пункту построения точки B и C лежат на окружности T с центром M, то $BM = MC$, а значит равны и опирающиеся на них вписанные углы $\angle BAM$ и $\angle MAC$ окружности S. Таким образом луч $AI = AM$ является биссектрисой угла A треугольника ABC.

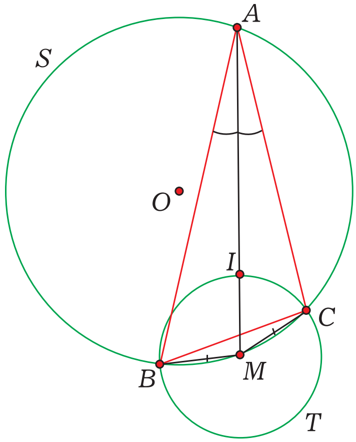

Рис. 3

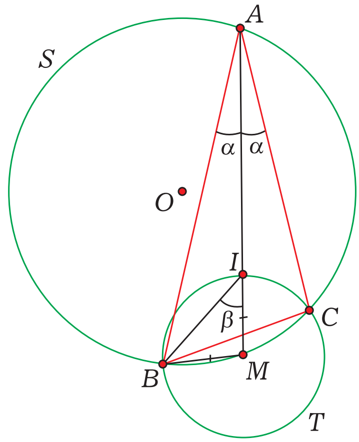

Рис. 4

Докажем, что точка I принадлежит также и биссектрисе угла ABC. Для этого введём обозначения углов: $\angle BAM = \angle MAC = \alpha$ и $\angle MBI = \beta$. Так как $\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI$ и $\angle MBC = \angle MAC = \alpha$, как вписанные в окружность S и опирающиеся на одну и ту же дугу MC, то получим $\angle CBI = \angle MBI - \angle MBC = \beta - \alpha$ (*)

Из равнобедренного треугольника BMI ($MB = MI$ как радиусы окружности W) получим $\angle MIB = \angle MBI = \beta$. Но угол MIB при этом является внешним по отношению к треугольнику ABI, то есть $\angle MIB = \angle ABI + \angle BAM = \angle ABI + \alpha$. Из последних двух равенств следует, что $\angle ABI = \beta - \alpha$(**). Из равенств (*) и (**) получаем равенство углов CBI и ABI, что означает, что BI – биссектриса угла ABC. Доказав таким образом, что точка I находится на пересечении биссектрис углов A и B, мы доказали, что I действительно центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Замечание. При заданных на плоскости точках I, O и A однозначно определяются расстояния $d = OI$ и $OA = R$. Из известной формулы Эйлера[1] $d^2 = R^2 - 2Rr$ вытекает, что и радиус r вписанной окружности, и она сама, также определяются однозначном образом, а значит, что и вершины B, C определены однозначно, так как они суть пересечения описанной окружности S и касательных AB и AC к вписанной окружности, проведённых из точки A.

Так как при построении точка A была выбрана произвольно, то получаем следующий

Вывод. Геометрическим местом точек плоскости, где могут находиться вершины треугольника при заданных центре I вписанной окружности и центре O описанной окружности, является плоскость, за исключением круга с центром в точке O и радиуса OI.

---

[1] Леонард Эйлер – крупнейший математик XVIII века, считается одним из величайших математиков в истории.

Далее мы заинтересовались возможностью определения геометрического места таких точек, которые, являясь вершинами восстанавливаемого треугольника, определяли бы его как остроугольный, прямоугольный и тупоугольный.

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке O, ось абсцисс направим по прямой OI, ось ординат по прямой, перпендикулярной прямой OI. Длину отрезка OI примем за единицу.

Рассмотрим случай, когда точка $A(x_0;y_0)$ является вершиной *острого* угла прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Тогда, так как прямой угол C опирается на диаметр AB, точка B симметрична точке A относительно начала координат, являющегося центром окружности, а значит вершина B имеет координаты $B(-x_0;-y_0)$ и уравнение прямой AB примет вид: $y_0x-x_0y=0$. Используя формулу для нахождения расстояния от точки до прямой, получим, что расстояние от точки $I(1;0)$ до прямой AB равно $\dfrac{|y_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Найденное расстояние совпадает с радиусом вписанной окружности r, и с учётом того, что $d=1$, из формулы Эйлера следует уравнение $1=x^2+y^2-2|y|$. После преобразования оно упрощается следующим образом:

$$x^2+(|y|-1)^2=2. \qquad (*)$$

Уравнение же (*) задаёт объединение двух дуг окружностей с центром в точках $(0;\pm1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

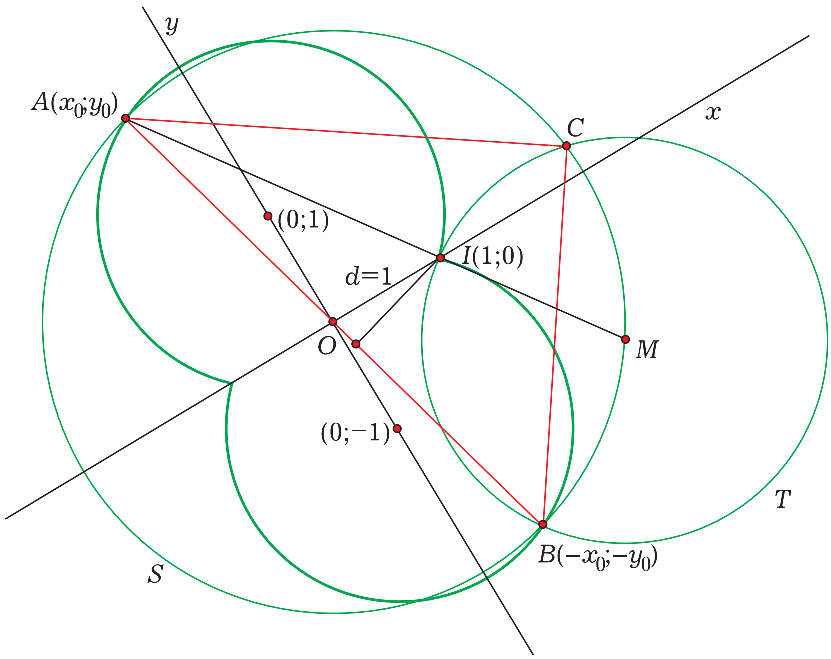

Рис. 5

Теперь предположим, что точка $A(x_0;y_0)$ является вершиной *прямого* угла треугольника ABC. Тогда $\angle BAI = \angle CAI = 45°$ и с учётом введённой выше системы координат получим координаты точек $I(1;0)$ и $A(x_0;y_0)$ и длину отрезка $AI = \sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$. Опустим перпендикуляр IH на катет AB треугольника ABC, он является катетом в прямоугольном равнобедренном треугольнике AIH с гипотенузой AI, а значит

$$r = \frac{AI}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}}{\sqrt{2}}.$$

После подстановки выражений для d, R, r в формулу Эйлера получаем уравнение

$$1 = x^2+y^2-\sqrt{2}(x^2+y^2)\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

или после преобразования:

$$((x-1)^2+y^2)^2 = 2((x-1)^2-y^2). \qquad (**)$$

Отметим, что в полярных координатах $(r;\varphi)$ с центром в точке I и осью IO уравнение (**) примет более простой вид

$r^2 = 2\cos 2\varphi;\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Кривая, задаваемая этим уравнением, известна под названием *лемниската Бернулли*[2].

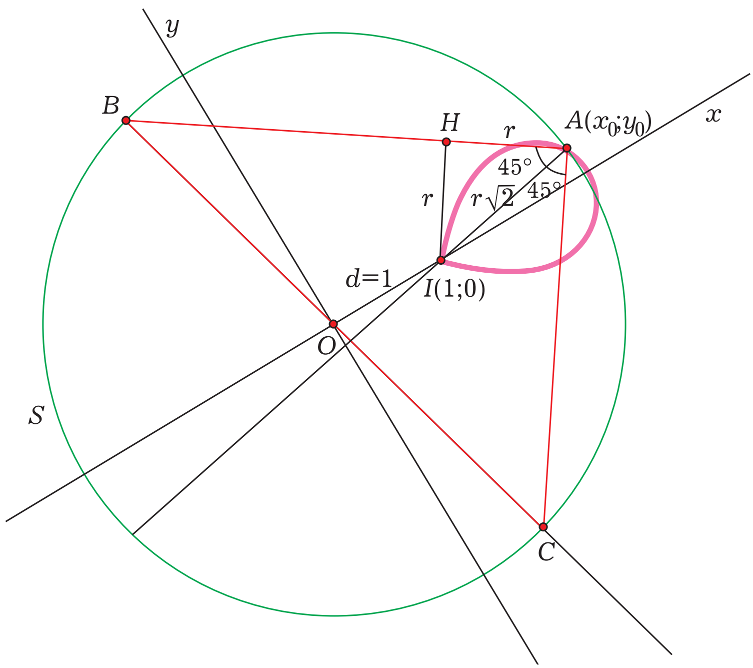

Рис. 6

[2] Яков Бернулли – швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа.

Если точку A брать всё дальше и дальше за пределы областей, задаваемых уравнениями (*) и (**), то треугольник ABC будет всё больше и больше напоминать правильный, а значит остроугольный треугольник.

Из соображений непрерывности можно заключить, что вся внешняя область, ограниченная уравнениями (*) и (**), состоит из точек, задающих остроугольные треугольники.

Замечание. Стоит отметить, что треугольник ABC будет равносторонним только в случае совпадения точек O и I, в чём предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Итак, мы доказали следующую теорему: «Множество всех точек плоскости, где могут находиться вершины треугольников с заданными центром I вписанной окружности и центром O описанной окружности, (точки I и O различны) представляет собой плоскость, из которой удален круг W с центром в точке O и радиуса OI.

При этом (A – одна из вершин треугольника, Q_1 – дуги, заданные уравнением (*), Q_2 – лемниската Бернулли, заданная уравнением (**))

1) если $A \in Q_1$, то треугольник прямоугольный, а угол A – острый;

2) если $A \in Q_2$, то треугольник прямоугольный, с прямым углом A;

3) если A расположена внутри области, ограниченной Q_1, но снаружи круга W, то треугольник тупоугольный, при этом угол A – острый, а вершина тупого угла расположена внутри области, ограниченной Q_2;

4) если A расположена внутри области, ограниченной Q_2, то треугольник тупоугольный с тупым углом при вершине A;

5) если A расположена снаружи области, ограниченной Q_1 и Q_2, то треугольник остроугольный, причём при большем удалении точки A от указанных областей треугольник будет стремиться к равностороннему.»

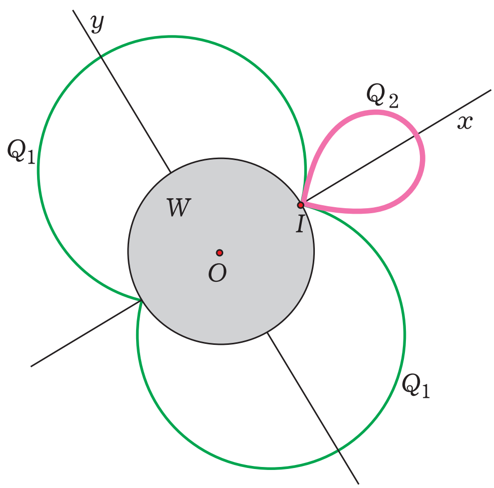

Рис. 7

Литература

Вавилов В.В. Математические успехи школьников. 2-е издание, исправ. и доп. – М.: СУНЦ МГУ, 2015. – 68 с.