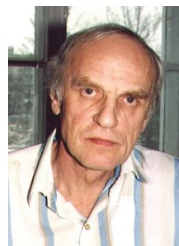


Рожественский Валерий Викторович

*Доцент (по совместительству)
кафедры математики СУНЦ МГУ*



Решение экстремальных задач без использования дифференцирования

Введение

Обычно задачи на поиск максимума или минимума решают так: выражают искомую величину через какую-то переменную и ищут экстремум полученной функции, дифференцируя ее и приравнявая производную к нулю, а потом решают полученное уравнение. На этом пути обычно приходится выполнять некоторые вычисления, и могут возникать различные тонкости, которые мы в данной статье не будем обсуждать, так как ниже будут приведены примеры задач, в основном геометрических, которые можно решить с минимумом вычислений простыми геометрическими рассуждениями.

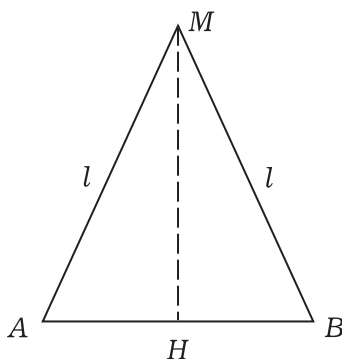


Рис. 1

Чтобы привести задачу к условному экстремуму, введём обозначения.

Пусть MN высота с длиной h , и $AM = l$, тогда $S_{AMB} = S = rh$, причём $r^2 + h^2 = l^2$. Отсюда $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ и $S(r) = r\sqrt{l^2 - r^2} \rightarrow \max$, и мы свели задачу к изучению функции S от одной переменной r .

Пример 1. Решения задачи указанным способом.

При какой длине основания равнобедренный треугольник AMB с данной боковой стороной l имеет максимальную площадь, и какова эта площадь?

Далее приходится дифференцировать функцию $S(r)$ и искать корни производной. Это решение довольно громоздко. Правда, если учесть, что функция $S(r)$ достигает своего наибольшего значения в той же точке, что и функция $(S(r))^2 = r^2(l^2 - r^2)$, и, сделав замену $r^2 = t$, получаем квадратный трёхчлен $t(l^2 - t)$ с координатой вершины $t = \frac{l^2}{2}$. Отсюда $r^2 = \frac{l^2}{2}$ и т.д.

Первое упрощение.

Применив формулу $S = \frac{1}{2}l^2 \sin M$, получаем задачу $\sin M \rightarrow \max$, откуда $\angle M = 90^\circ$ и т.д.

Второе упрощение.

Изобразим треугольник в другом ракурсе.

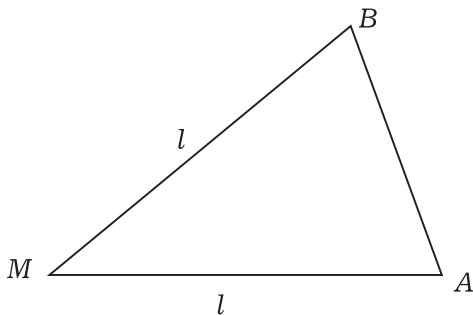


Рис. 2

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}l \cdot h_B$, и задача сводится к простейшей задаче $h_B \rightarrow \max$, т.е. отрезок BM должен быть перпендикулярен к отрезку AM !

Последнее решение наводит на мысль о серьёзных обобщениях.

Пример 2.

Все боковые рёбра DA , DB , DC правильной треугольной пирамиды $DABC$ имеют длину l . Найдите угол α наклона бокового ребра к плоскости основания ABC той пирамиды, которая имеет наибольший объём.

Решение.

Примем за основание пирамиды грань DAB .

Воспользуемся формулой для объёма $V = \frac{1}{3}S_{DAB} \cdot h_C$, где h_C высота пирамиды, проходящей через точку C . Наибольшая площадь основания достигается при условии $DA \perp DB$, а наибольшая высота очевидно равна l . Мы видим, что грань ABC – правильный треугольник, и высота h_D проходит через центр O описанной вокруг ABC окружности. Поскольку $AB = l\sqrt{2}$ и $AO = \frac{AB}{\sqrt{3}}$,

$$\text{то } \cos \alpha = \frac{AO}{l} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

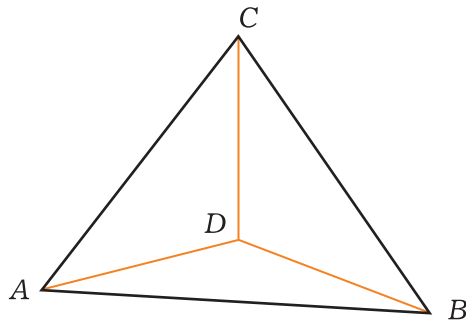


Рис. 3

Заметим, что если в треугольной пирамиде $DABC$ известны длины рёбер $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, то её

объём принимает наибольшее значение равное $\frac{abc}{6}$, если рёбра DA , DB , DC попарно перпендикулярны.

Пример 3.

Найдите угол между образующей и плоскостью основания прямого кругового конуса, имеющего наибольший объём, если задана длина образующей.

Решение.

Объём такого конуса относится к объёму правильной треугольной пирамиды так же, как относятся площади их оснований. Значит, наибольший объём будет у того конуса, в который вписана пирамида наибольшего объёма.

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Обобщим задачу из примера 2 на произвольную n -угольную пирамиду с равными боковыми ребрами.

Пример 4.

Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания n -угольной пирамиды, если она имеет наибольший объём среди всех пирамид с длиной бокового ребра l .

Решение.

Прежде всего, заметим, что все вершины основания одинаково удалены от проекции вершины пирамиды на плоскость основания, т.е. лежат на одной окружности.

Докажем важное утверждение.

Лемма 1.

Предполагая, что n -угольник, вписанный в данную окружность, имеющий наибольшую площадь, существует, докажем, что он правильный.

Доказательство.

Если, например, $AB \neq BC$, то площадь треугольника ABC можно увеличить, взяв в качестве новой вершины точку B_1 , являющуюся серединой дуги ABC .

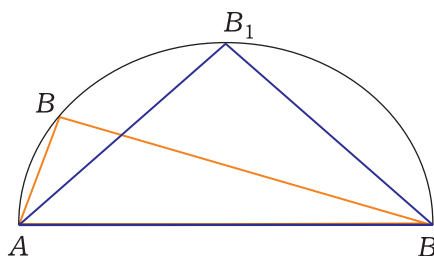


Рис. 4

Теперь мы видим, что если обозначить вершины вписанного многоугольника $A_1 A_2 \dots A_n$ и углы, под которыми отрезки $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ видны из центра окружности, через $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, то для площади многоугольника получаем выражение

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n),$$

которое принимает наибольшее значение, когда все углы одинаковы и равны $\frac{2\pi}{n}$.

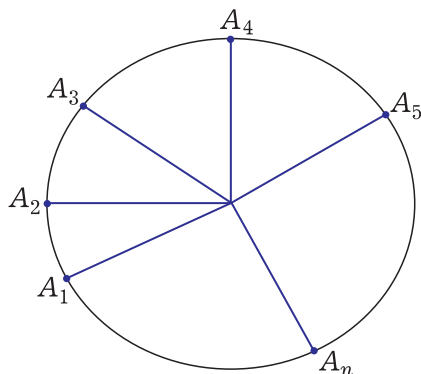


Рис. 5

Итак, пирамида наибольшего объёма должна быть правильной.

Учитывая результат примера 3, получаем

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$, совпадающий с

ответом для описанного конуса.

Замечание.

Из равенства синусов следует, что периметр многоугольника, вписанного в окружность, будет наибольшим, если многоугольник правильный. Действительно, стороны такого многоугольника связаны с углами так: $A_i A_{i+1} = 2R \sin \frac{\alpha_i}{2}$, и мы получаем опять сумму синусов.

(Чисто «геометрическое» решение задачи о наибольшем периметре даже для треугольника не является очевидным!)

Пример 5.

Докажите, что из всех параллелепипедов, вписанных в данную сферу, наибольший объём имеет куб.

Доказательство: если некоторая грань $ABCD$ не квадрат, то объём параллелепипеда можно увеличить, заменив её квадратом.

Пример 6.

В сферу вписан цилиндр. Каково должно быть соотношение между диаметром его основания и высотой, чтобы его объём был наибольшим?

Решение.

Впишем в цилиндр прямоугольный параллелепипед. Зафиксируем его высоту, тогда объём можно увеличить, взяв за основание квадрат. Отношение объёма параллелепипеда с квадратным основанием и объёма цилиндра равно отношению пло-

щадей их оснований $\frac{2}{\pi}$. Значит, чем

больше объём вписанного в цилиндр параллелепипеда, тем больше объём цилиндра. Отсюда следует, что параллелепипед должен быть кубом, и искомое отношение равно $\sqrt{2}$.

Пример 7.

Определите, каким должно быть соотношение между диаметром окружности, описанной вокруг основания n -угольной призмы, и высотой этой призмы, если известно, что она имеет наибольший объём среди всех призм, вписанных в данную сферу.

Решение.

Из решения предыдущей задачи следует, что в основании такой призмы лежит правильный n -угольник, а описанный вокруг призмы цилиндр имеет наибольший объём, т.е. ответ опять $\sqrt{2}$.

Пример 8.

Определите форму цилиндра, вписанного в данную сферу и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

Решение.

Площадь боковой поверхности больше площади осевого сечения в π раз. Значит, осевое сечение – квадрат.

Задачу можно обобщить на правильные призмы, вписанные в сферу.

Часто для решения ряда экстремальных задач достаточно применить неравенство о средних $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. В ряде случаев это базовое неравен-

ство следует использовать для большего числа переменных. Покажем, как перейти от двух переменных к трём.

$$\text{Докажем, что } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}.$$

Для этого проведём рассуждения по схеме: $n=2 \rightarrow n=4 \rightarrow n=3$.

$$\text{Обозначим } d = \frac{a+b+c}{3}. \text{ Тогда}$$

$$d = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d}.$$

Последнее неравенство легко доказывается, если дважды применить базовое.

Итак, $d^4 \geq a \cdot b \cdot c \cdot d$, и сокращая на d , получаем $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

Неравенства о средних для двух и трёх переменных можно интерпретировать как задачу на поиск прямоугольника максимальной площади при данном периметре и как поиск прямоугольника минимального периметра при данной площади, и аналогичную задачу про объём прямоугольного параллелепипеда с данной суммой ребер.

Литература

[1] Сборник конкурсных задач для поступающих в вузы / В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин, С.Ф.Смирнова. — 3-е изд., испр. и доп.—М.:ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век» : ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003—480 с.: илл.

[2] Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах,—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. , 1986.—192 с.—(Б-чка «Квант». Вып. 56.)

Пример 9.

Пусть x и y положительны. Найдите $\min \left(x+y+\frac{1}{x \cdot y} \right)$. Применив

$$\text{неравенство } \frac{x+y+\frac{1}{x \cdot y}}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{x \cdot y}} = 1,$$

мы получили $\left(x+y+\frac{1}{x \cdot y} \right) \geq 3$, и равенство достигается в случае $x=y=\frac{1}{x \cdot y}$. Но тогда $x=y=1$, и

ответ: 3.

Пример 10.

Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{y}{y^2+1} = 1.$$

Покажем, что $\frac{\sqrt{x}}{x+1} \leq \frac{1}{2}$. Посколь-

ку $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$, наше неравенство имеет место и превращается в равенство только в случае $x=1$. Аналогичный вывод делаем и для второй дроби.

Ответ: (1;1).

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Геометрия — это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах.

Математика для учёного — то же самое, что скальпель для анатома.

Нильс Абель