

Алексей Иванович Сгибнев

*Кандидат физико-математических наук,
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал», г. Москва*



Вокруг задачи о котёнке

Как программы динамической геометрии помогают решать сложные задачи

Знаменитая книга [1] начинается такой задачей:

«Лестница, стоявшая на гладком полу, соскальзывает вниз. По какой линии движется котёнок, сидящий на середине лестницы?»

Эта статья посвящена геометрическому сюжету, который обобщает задачу о котёнке.

Решая серию задач, мы в результате откроем достаточно сложную теорему. Мы будем использовать не только ручку и бумагу, но и программу динамической геометрии — «Геогенру» [2] или «Матконструктор» [3]. Подробнее о работе с этими программами можно узнать из книги автора [4].

Решение задач в этой статье состоит из двух частей:

1) **эксперимент**, проводимый в программе динамической геометрии: строим подвижный чертёж, изучаем его поведение, выдвигаем гипотезы;

2) **решение**: доказываем эти гипотезы.

Рекомендуем читателям разобратся в решении задач 1 и 2, самостоятельно проделывая в программе описанные здесь построения и эксперименты. А затем решить задачи 3-6, не забегая при чтении вперёд и пытаясь догадаться до ответов. Знаком (?) помечены утверждения, которые полезно продумать.

На рисунках точки, которые по смыслу задачи подвижны, изображены «пустыми», а остальные — закрашенными.

1. (Обобщённая задача о котёнке.) По данным перпендикулярным прямым AB и AC скользят концы отрезка DE данной длины d . На отрезке DE отмечена точка F . Изучите траекторию точки F в зависимости от её положения на отрезке.

Эксперимент

Строим взаимно перпендикулярные прямые AB и AC и отрезок PQ длины d . Отмечаем на прямой AB точку D , строим окружность с центром D и радиусом PQ . Отмечаем точки пересечения окружности с прямой AC , называем их E и E_1 . Проводим радиусы DE и DE_1 , после чего скрываем окружность.

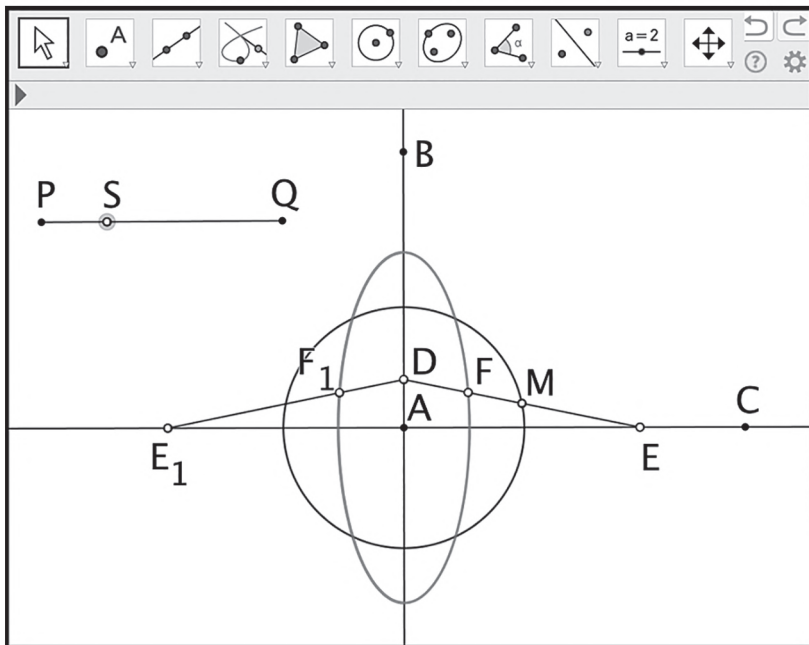
Построим точки M и M_1 — середины отрезков DE и DE_1 . Построим живые следы точек M и M_1 при движении точки D . (Живой след в «Геогebre» строится инструментом «Локус», а в «Матконструкторе» — инструментом «Траектория».)

Полученная траектория похожа на окружность с центром в точке A и радиусом, равным $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}d$. Мы

угадали ответ классической задачи о котёнке. Продолжаем исследование: отмечаем произвольную точку S на отрезке PQ , строим окружность с центром D и радиусом PS . Точки её пересечения с отрезками DE и DE_1 называем F и F_1 , после чего скрываем окружность.

Построим живые следы точек F и F_1 при движении точки D . (Живой след показывает полную траекторию точки F при всех возможных положениях точки D и автоматически перестраивается при движении точки S .) Будем двигать точку S по отрезку PQ и изучать изменение траектории.¹

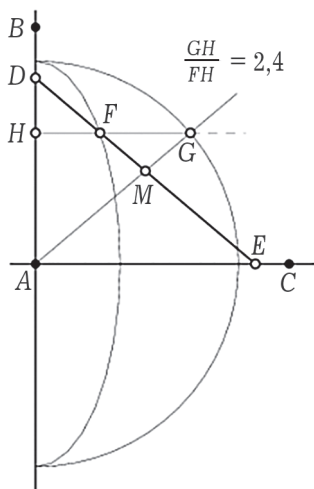
Если точка F совпадает с M , то получаем уже упомянутую окружность.



¹ В «Матконструкторе» можно просто отметить точку F на отрезке DE и двигать её; а вот «Геогebra» не умеет строить локус такой незакреплённой точки.

Если же точка F не совпадает с M , то её траектория становится «овалом». Чем дальше F от M , тем более овал «вытягивается»; если F совпадает с одним из концов отрезка DE , то траектория превращается в отрезок, лежащий на одной из прямых AB или AC . Но вот незадача: «овал» не является математическим термином. Чтобы прийти к строгому определению, сделаем дополнительные построения.

Проведём луч AM , из точки F опустим перпендикуляр FH на прямую AB . Обозначим точку пересечения прямой FH и луча AM через G . Построим живой след точки G при движении точки D и получим (полу)окружность с центром A . Выведем на экран отношение GH/FH . Заметим, что при скольжении отрезка DE это отношение остаётся постоянным. Т.е. наш «овал» получается сжатием окружности, описываемой точкой G , к её диаметру, лежащему на прямой AB .



Решение

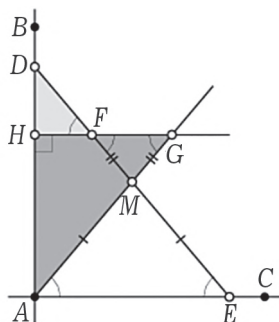
Заметим, что AM — медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника ADE , поэтому $AM = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} d = \text{const}$. Следовательно, точка M лежит на окружности с центром A .

Определение. Рассмотрим окружность и её диаметр KL . Зададим число $p \geq 1$. Из точки G окружности опустим перпендикуляр GH на диаметр KL . Отметим на отрезке GH точку F такую, что $FH = GH / p$. Множество всех точек F называется эллипсом. Центр окружности называется центром эллипса, а отрезок KL — большой осью эллипса. (Если $p = 1$, то эллипс совпадает с окружностью).²

Докажем, что если F — произвольная точка отрезка DE (но не середина и не конец), то точка F описывает эллипс с центром A и большой осью на прямой AB .

Обозначим $DF = a$, $FE = b$, заметим, что эти числа не меняются при скольжении отрезка DE .

По первому абзацу решения $AM = ME$, т.е. углы MAE и MEA равны. Поскольку HF параллельно AC , то и углы GFM и FGM равны, а значит, $FM = GM$. Отсюда $AG = FE = b$.



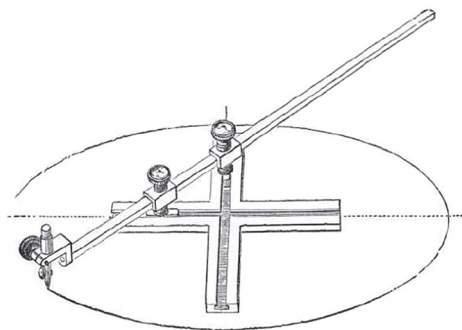
² Оказывается, эллипс можно однозначно построить по пяти точкам (как окружность по трём), в «Геогebre» и «Матконструкторе» есть такой инструмент, его значок даже является логотипом «Геогebre».

Следовательно, точка G лежит на окружности с центром A и радиусом b .

Треугольники HFD и HGA подобны по двум углам (углы при вершине H прямые, $\angle HFD = \angle GFM = \angle FGM$). Поэтому $GH / FH = GA / FD = FE / FD = b / a = \text{const}$. Значит, точка F получается из точки G сжатием к прямой AB . Поскольку точка G «пробегает» окружность, то точка F «пробегает» эллипс.

Замечание 1. Приведём доказательство в координатах для тех, кто знает уравнение эллипса. Введём систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AC , а ось ординат — с прямой AB . Пусть $DF = a$, $FE = b$, $\angle AED = t$, (x, y) — координаты точки F . Тогда $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, следовательно, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ независимо от t . Но это уравнение эллипса. (При $a = b$ получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.) Если F — точка прямой DE вне отрезка DE , можно действовать аналогично.

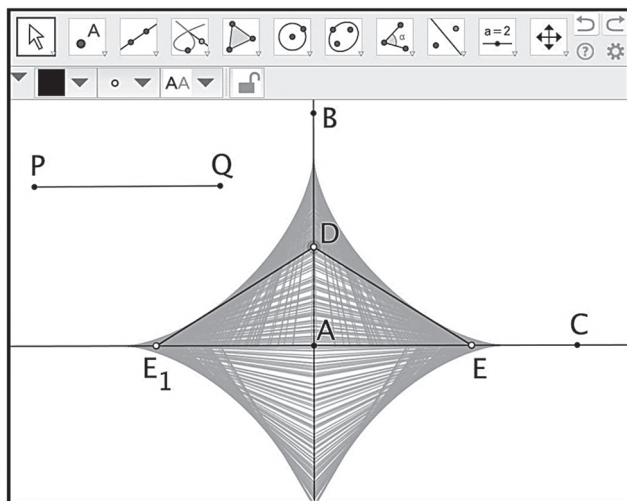
Замечание 2. Решение этой задачи даёт идею механического устройства для вычерчивания эллипса — эллипсографа Леонардо да Винчи (см. рисунок). Фиксируя карандаш в



различных точках рейки (прямой DE), получаем разные эллипсы.

Демонстрация. Построим множество всех отрезков DE . Для этого включим след отрезка DE и будем двигать точку D по прямой AB . Получим криволинейную четырёхугольную фигуру с симметричной огибающей. В данном случае огибающая называется *астроидой* (от греческого «похожая на звезду»). Подробнее про астроиду см. [1, глава 7]. Оси симметрии этой астроиды совпадают с прямыми AB и AC .

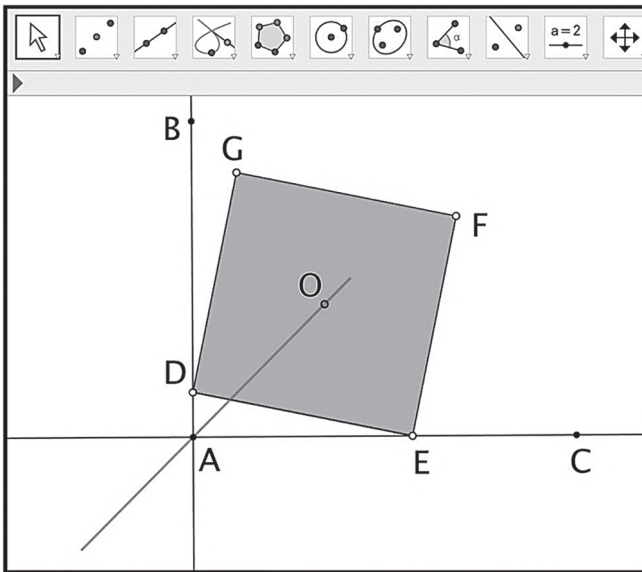
Построим множество всех эллипсов. Для этого включим след эллипса и будем двигать точку S по отрезку PQ . Получим ту же самую астроиду!



2. По данным перпендикулярным прямым AB и AC скользят две смежные вершины D и E деревянного квадрата $DEFG$. Какова траектория центра квадрата O ?

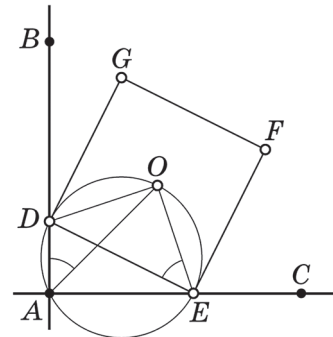
Эксперимент. Поскольку квадрат деревянный, его сторона имеет постоянную длину. Построим, как в задаче 1, две перпендикулярные прямые AB и AC и отрезок DE дан-

ной длины, концы которого скользят по этим прямым. Теперь на отрезке DE как на стороне построим квадрат $DEFG$, отметим его центр O . Построим след центра при движении точки D . Увидим, что след похож на отрезок биссектрисы угла BAC и биссектрисы вертикального с ним угла. Значит, достаточно доказать, что $\angle DAO = 45^\circ$ независимо от положения точки D на луче AB .



Решение. Заметим, что у четырёхугольника $ADOE$ два противоположных угла A и O прямые. Опишем вокруг четырёхугольника окружность. Заметим, что вписанные углы DAO и DEO опираются на одну и ту же дугу DO . Однако угол DEO равен 45° независимо от положения квадрата. Значит, и угол DAO равен 45° , т.е. точка O лежит на биссектрисе угла BAC .

Замечание. Идея другого решения: построим квадрат с вершиной A , в который вписан квадрат $DEFG$, и проверим, что O — его центр (?).



Интересно, что, если заменить деревянный квадрат на квадрат переменного размера, траектория центра будет такая же (?).

Задачи для самостоятельного решения

3. По данным перпендикулярным прямым AB и AC скользят концы отрезка DE данной длины d . На прямой DE вне отрезка DE отмечена точка F . Изучите траекторию точки F в зависимости от её положения на прямой.

4. По данным прямым AB и AC скользят вершины D и E равнобедренного равноугольного треугольника DEF (точки A и F лежат по разные стороны от прямой DE). Приведите примеры углов BAC (укажите градусную меру угла), для которых траекторией точки F будет а) отрезок, б) дуга окружности. Удобно сначала создать ползунок, задающий

градусную меру угла, а затем по нему построить угол BAC .

5. По данным прямым AB и AC скользят концы отрезка DE . К отрезку DE проведён серединный перпендикуляр, пересекающий описанную окружность треугольника ADE в точках K и L . Найдите траектории точек K и L .

6. По данным прямым AB и AC скользят вершины D и E двух острых углов равнобедренного равноугольного треугольника DEF (точки A и F лежат по разные стороны от прямой DE). Найдите траекторию точки F в общем случае (если угол BAC произвольный).

Подсказки

3. Используйте конструкцию из задачи 1.

4. а) Проведите окружность через точки A, D, E . б) Проведите окружность через точки A, D, E . Где находится её центр? Изменяется ли её радиус при движении отрезка DE ?

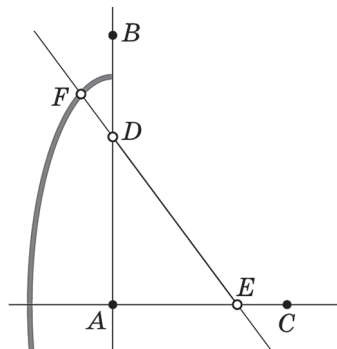
5. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне тре-

угольника и биссектриса противоположного угла треугольника пересекаются на его описанной окружности.

6. Проведите окружность через точки A, D, E , постройте серединный перпендикуляр к отрезку DE и используйте результаты задачи 5 и задачи 1 (или 3).

Решения

3. Эксперимент. Построим прямые AB и AC , а также отрезок DE постоянной длины так же, как в задаче 1. Проведём прямую DE , отметим на ней вне отрезка DE точку F . Включим и прорисуем след точки F , двигая отрезок DE .³ Точка F описывает (полу)эллипс с центром A и большой осью на прямой AB .

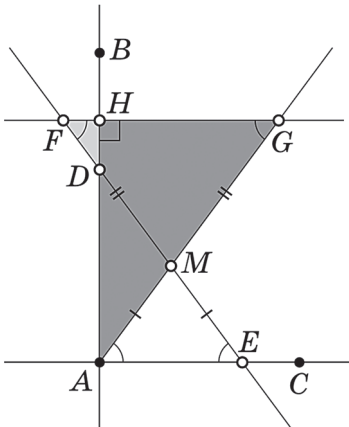


³ В «Матконструкторе» возможно построение живого следа в такой конструкции. В «Геогебре» для живого следа требуется создать шаблон прямой DE с шаблоном точки F так же, как мы делали в задаче 1.

Решение

Обозначим $DF = a$, $FE = b$, заметим, что эти числа постоянны. Определим точки M и G как в решении задачи 1. Аналогично этому решению $AM = ME$, $FM = GM$. Отсюда $AG = FE = b$. Следовательно, точка G лежит на окружности с центром A и радиусом b .

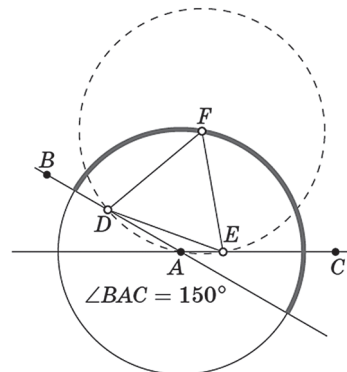
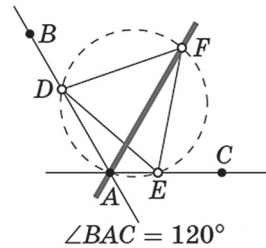
Треугольники HFD и HGA подобны по двум углам (углы при вершине H прямые, $\angle HFD = \angle GFA$). Поэтому $\frac{GH}{FH} = \frac{GA}{FD} = \frac{FE}{FD} = \frac{b}{a} = \text{const}$. Значит, точка F получается из точки G сжатием к прямой AB и симметрией относительно AB . Поскольку точка G «пробегает» окружность, то точка F «пробегает» эллипс с большой осью на AB , отражённый относительно AB . Но эллипс симметричен относительно своих осей.



4. Эксперимент. Построим прямую AB , создадим ползунок, задающий градусную меру угла α , а затем повернём прямую AB на угол α вокруг точки A .⁴ Назовём полученную прямую AC . Построим отрезок PQ , на прямой AB отметим точку D .

Построим окружность с центром D и радиусом PQ . Назовём E точку пересечения окружности с прямой AC , скроем окружность. На отрезке DE построим равносторонний треугольник DEF в нужную сторону.

Построим живой след точки F при движении точки D . Получим дугу некоторой кривой. Будем менять угол α на ползунке и следить за изменениями кривой. Отрезок получится при $\alpha = 120^\circ$ (для проверки этой гипотезы построим прямую по двум точкам, принадлежащим живому следу). Дуга окружности получится при $\alpha = 150^\circ$ (для проверки построим окружность по трём точкам, лежащим на живом следе). Проведём окружность через точки A , D , E . При $\alpha = 120^\circ$ точка F попадёт на эту окружность. При $\alpha = 150^\circ$ точка F совпадёт с центром этой окружности.

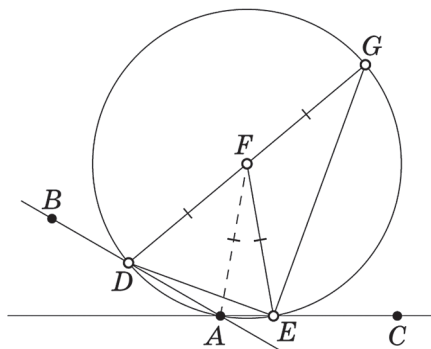


⁴ В «Геогеебре», чтобы ввести символ α , надо одновременно набрать «alt» и «a», чтобы β – «alt» и «b», и т.д.

Решение. а) Пусть $\angle BAC = 120^\circ$. Заметим, что поскольку $\angle DAE + \angle DFE = 180^\circ$, то вершины четырёхугольника $ADFE$ лежат на окружности, значит, $\angle DAF = \angle DEF = 60^\circ$ независимо от точки D . Следовательно, точка F лежит на биссектрисе угла BAC . Понятно, что нам подходят не все точки биссектрисы, а только удалённые от вершины A «не слишком далеко». Получается отрезок биссектрисы.

б) Пусть $\angle BAC = 150^\circ$. Отметим точку G такую, что F — середина отрезка DG . Проведём окружность с центром F и точкой D . Она пройдёт через точки E и G , так как $FD = FE = FG$. Но она же пройдёт и через точку A , поскольку $\angle DGE = \frac{1}{2} \angle DFE = 30^\circ$, а $\angle DGE + \angle DAE = 180^\circ$.

Заметим, что $FA = FD = DE = \text{const}$, т. е. точка F лежит на дуге окружности с центром A .

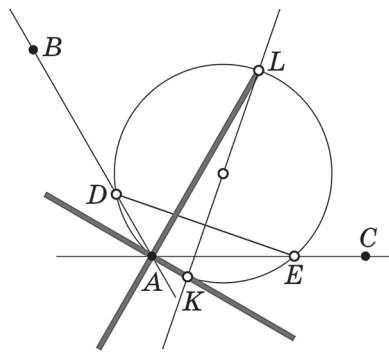


$$\angle DFE = 60,0^\circ$$

$$\angle DGE = 30,0^\circ$$

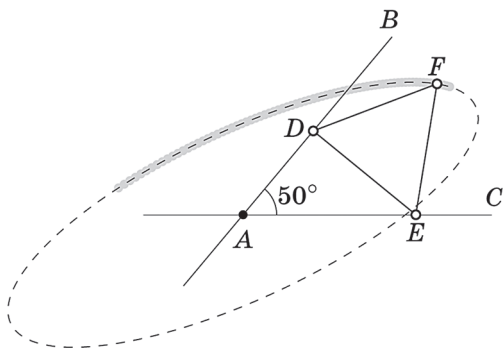
5. Эксперимент. Построим прямые AB и AC и отрезок DE с концами на прямых. Проведём окружность через точки A, D, E , построим серединный перпендикуляр к отрезку DE , обозначим точки пересечения K

и L . Построим следы точек K и L при движении точек D и E . Получим отрезки биссектрис углов, образованных прямыми AB и AC (они взаимно перпендикулярны как биссектрисы смежных углов).

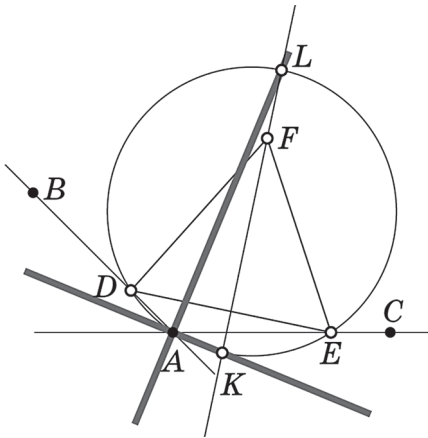


Решение. Отрезки DL и EL равны, значит, равны хорды DL и EL . Отсюда равны и вписанные углы DAL и EAL . Следовательно, точка L лежит на биссектрисе угла BAC . Аналогично — для точки K .

6. Эксперимент. Используем чертёж к задаче 4. Если угол BAC не равен 120° и 150° , то траектория точки F похожа на половину эллипса с центром в точке A . (Эту гипотезу можно подкрепить, отметив на кривой пять точек и построив по ним конику — траектория совпадёт с её частью.)



Решение. Проведём окружность через точки A , D , E и серединный перпендикуляр к отрезку DE . Точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью обозначим K и L . Поскольку KL — серединный перпендикуляр к хорде DE , то это — диаметр. От положения DE не зависит как длина диаметра (она равна $DE/\sin(\angle EAD) = DE/\sin(\angle BAC)$), так и расстояния от точек K и L до отрезка DE (равнобедренный треугольник KED однозначно определяется основанием ED и опирающимся на него вписанным углом EKD ; аналогично для треугольника LED). Но так как вершина F треугольника DEF тоже лежит на прямой LK на одном и том же расстоянии от DE , то не зависят от положения DE и расстояния от F до точек L и K . По задаче 5 есть две неподвижные перпендикулярные прямые, пересекаю-



щиеся в точке A ; и точки L и K движутся по этим прямым. Но тогда по задаче 1 (или 3) точка F — фиксированная точка прямой KL — лежит на эллипсе с центром A .

Замечание. Это доказательство легко обобщить на равнобедренный треугольник с основанием DE , чуть сложнее — на произвольный треугольник (?).

Сделав это, вы докажете следующее утверждение:

Теорема Ван Схоутена. Если две вершины деревянного треугольника скользят по прямым AB и AC , то его третья вершина описывает эллипс с центром A или отрезок.

Как видим, программы динамической геометрии позволяют проводить эксперименты с подвижными чертежами, проверять гипотезы, находить закономерности и идеи доказательств. Вооружившись «Матконструктором» или «Геогеброй», можно решить гораздо более сложную задачу, чем только с помощью ручки и бумаги. А иногда даже открыть новую теорему. Подробнее о решении задач с помощью динамической геометрии рассказано в книге [4].

Автор благодарен М. Волчкевичу, В. Дубровскому, Е. Коноваленко, Г. Мерзону, М. Панову, А. Шаповалову и В. Шувалову.

Работа выполнена при поддержке
гранта РФФИ №19-29-14217.

Литература

- [1] Н.Б.Васильев, В.Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. М.: МЦНМО, 2004. Также см. интернет-издание с динамическими моделями: <http://zadachi.mccme.ru/prkr>
- [2] <https://geogebra.org/classic/geometry>
- [3] <https://urok.1c.ru/constructor/mathkit/1c/> (требуется бесплатная регистрация)
- [4] А.И. Сгибнев. Геометрия на подвижных чертежах. М.: МЦНМО, 2019. Также см. альбом подвижных чертежей к книге: <https://www.geogebra.org/m/qHxfNbxx>