Бегунц Александр Владимирович
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова,
директор Центра математического творчества МГУ имени М.В. Ломоносова,
учитель математики школы № 171 г. Москвы

Текстовые задачи, приводящие к уравнениям в целых числах

В процессе обучения математике традиционно большое внимание уделяется текстовым задачам, решаемым алгебраическим методом, который связан с введением переменных. Возникающие при этом математические модели обычно привязаны к изучаемой теме: линейные уравнения, системы линейных уравнений, квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения и т.п. В настоящей статье мы рассмотрим предлагавшиеся на интеллектуальных состязаниях или математических кружках задачи, при решении которых возникают уравнения в целых числах. Для некоторых типов таких уравнений есть чёткий алгоритм решения, но во многих случаях к получающемуся уравнению приходится искать отдельный подход.

Предлагаемая подборка задач и методов решения может быть полезна при подготовке к интеллектуальным состязаниям и единому государственному экзамену по математике, а также для проведения занятий математических кружков и повышения математической культуры школьников разного возраста.

Начнём с обсуждения задач, приводящих к уравнениям, решаемым по стандартным схемам. Линейное уравнение с одной целочисленной переменной имеет вид $an + b = 0$ (здесь и далее a и b – целочисленные параметры). При $a \neq 0$ (а это основной невырожденный случай), в отличие от уравнения $ax + b = 0$, решение может быть как единственным ($n = -b/a$, если b делится на a), так и отсутствовать (если b не делится на a). Рассмотрим задачу Московской математической регаты 2013/14 учебного года (8 класс, тур 3, задача 1, 64563[1]).

Задача 1. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 10, 15 и 18 скамеек. Когда поезд отъезжал, все математики тоже считали скамейки, причём один из них насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. Сколько скамеек насчитал оставшийся математик?

[1]Приведены номера рассматриваемых или аналогичных им задач в электронной системе [4].

Решение. Каждый из математиков при подсчётах учёл все скамейки на станции ровно по одному разу, значит, в итоге все они насчитали равное количество скамеек. Тогда, если после отправления поезда третий математик насчитал n скамеек, то второй должен был насчитать $n + 3$ скамейки, а первый – $n + 8$ скамеек. Таким образом,

$$\text{или } (n + 8)/(n + 3) = 3,$$

$$\text{или } (n + 3)/n = 3,$$

$$\text{или } (n + 8)/n = 3,$$

Первые два уравнения приводятся к виду $2n + 1 = 0$ и $2n = 3$ соответственно, а следовательно, не имеют натуральных корней. Третье уравнение $2n = 8$ имеет решение $n = 4$. Следовательно, на станции из вагона поезда видно 22 скамейки, а математик, о котором спрашивается в задаче, – тот, кто при подъезде к станции насчитал 15 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

Ответ: 7.

Следующая задача имеет игровой сюжет и также сводится к линейному уравнению (98630).

Задача 2. На столе лежит куча из 2022 ракушек. Из неё убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две и т.д. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из двух ракушек?

Решение. После каждой процедуры (изъятия камушка и раздвоения кучки) число ракушек на 1 уменьшается, а число кучек на 1 увеличивается. Первоначально ракушек было 2022, а кучек – одна, поэтому после n процедур ракушек окажется $2022 - n$, а кучек станет $n + 1$. В задаче требуется, чтобы выполнялось равенство $2022 - n = 2(n + 1)$, или $3n = 2020$, что невозможно, поскольку правая часть уравнения не кратна 3.

Ответ: нельзя.

Перейдём к линейным уравнениям с двумя переменными и начнём с однородного уравнения, которое удобно записывать в виде $ak = bn$ (будем считать, что оба целочисленных параметра a и b отличны от нуля). Разделив обе части уравнения на НОД (a, b), можно без ограничения общности считать, что a и b взаимно просты. Если пара (k, n) является решением этого уравнения, то k делится на b, т. е. $k = bt$ для некоторого целого числа t. Подставляя это значение k в уравнение, получим $abt = bn$, т. е. $n = at$. Обратно, все пары (bt, at), $t \in \boldsymbol{Z}$, являются решениями рассматриваемого линейного однородного уравнения. Отметим, что зачастую вопрос в задачах, приводящих к уравнениям подобного вида, ставится так, чтобы из серии решений было выбрано одно или несколько. Так обстоит дело в следующей задаче окружного этапа Московской региональной олимпиады по математике 2007/2008 учебного года (11 класс, задача 2, 111262).

Задача 3. В первый день Маша собрала на 25% грибов меньше, чем Вася, а во второй – на 20% больше, чем Вася, За два дня Маша собрала грибов на 10% больше, чем Вася. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

Решение. Маша в первый день собрала 3/4, а во второй – 6/5 от числа грибов, собранных в эти дни Васей. Пусть Вася собрал в первый день $4k$ грибов, а во второй – $5n$, тогда Маша собрала $3k$ и $6n$ грибов соответственно, где k и n – натуральные числа. По условию $3k + 6n = 1{,}1(4k + 5n)$, откуда $14k = 5n$. Поэтому k кратно 5, т. е. $k = 5t$, $t \in \boldsymbol{N}$, а $n = 14t$. Общее количество грибов равно

$$7k + 11n = 35t + 11 \cdot 14t = 189t \geq 189,$$

причём равенство достигается при $t = 1$, т. е. при $k = 5$, $n = 14$. Итак, наименьшее количество грибов равно 189.

Ответ: 189.

Обсудим теперь неоднородные линейные уравнения с двумя переменными. Пусть требуется решить уравнение $ak + bn = c$ (считаем, что k и n – искомые величины, а все целочисленные параметры a, b и c отличны от нуля). Если c не делится на НОД (a, b), то равенство невозможно, а значит, решений уравнение не имеет. Если же c делится на НОД (a, b), то, разделив обе части уравнения на этот НОД, получим уравнение того же вида, но в котором НОД $(a, b) = 1$. Пусть мы нашли некоторое решение этого уравнения, скажем, (k_0, n_0). Тогда $ak_0 + bn_0 = c$ и, вычитая равенства, получим

$$a(k - k_0) + b(n - n_0) = 0,$$

т. е.

$$a(k - k_0) = -b(n - n_0).$$

мы пришли к линейному однородному уравнению, которое решили выше: $k - k_0 = -bt$, $n - n_0 = at$, $t \in \boldsymbol{Z}$, Таким образом, все решения неоднородного уравнения имеют вид $(k_0 - bt, n_0 + at)$, $t \in \boldsymbol{Z}$.

Найти частное решение (k_0, n_0) можно разными способами: угадать, преобразовать уравнение и воспользоваться соображениями делимости, наконец, воспользоваться обратным ходом алгоритма Евклида (последний способ универсален, см., например, классическое пособие [2]). Рассмотрим задачу Турнира имени М.В. Ломоносова (1987 г., задача 11, 32087).

Задача 4. По числовой прямой прыгает кузнечик. Влево он может прыгать только на 37 см, а вправо – только на 47 см. За какое наименьшее число прыжков кузнечик может оказаться на 1 см правее исходной точки?

Решение. Пусть кузнечик сделает k прыжков вправо и n прыжков влево. Тогда задача сводится к отысканию решения уравнения $47k - 37n = 1$ в натуральных числах k и n с наименьшей суммой $k + n$. Следуя общему методу, найдём частное решение этого уравнения. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$47 = 1 \cdot 37 + 10; \quad 37 = 3 \cdot 10 + 7;$$

$$10 = 1 \cdot 7 + 3; \quad 7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Обратным ходом получаем

$$\begin{aligned}1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (10 - 1 \cdot 7) = \\ &= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = \\ &= 3(37 - 3 \cdot 10) - 2 \cdot 10 = \\ &= 3 \cdot 37 - 11 \cdot 10 = \\ &= 3 \cdot 37 - 11(47 - 37) = \\ &= 14 \cdot 37 - 11 \cdot 47 = \\ &= 47 \cdot (-11) - 37 \cdot (-14).\end{aligned}$$

Итак, частное решение $(-11, -14)$ найдено. Общее решение имеет вид $(-11 + 37t, -14 + 47t)$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Количество прыжков $84t - 25$ представляет собой возрастающую функцию от t, поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно найти наименьшее значение t, при котором оба числа $-11 + 37t$ и $-14 + 47t$ будут натуральными. Таким значением является $t = 1$, а соответствующее количество прыжков равно 59.

Ответ: 59.

Линейные уравнения с тремя и более переменными могут встречаться в задачах, приводящих к системам уравнений. В этом случае бывает удобно сделать преобразование, позволяющее получить уравнение с меньшим количеством переменных и воспользоваться соображениями делимости, а также описанными выше методами. Рассмотрим задачу отборочного этапа олимпиады «Ломоносов» 2013/2014 учебного года (10–11 классы, задача 1). Обратим внимание: в этой задаче мы будем пользоваться обозначениями x, y и z для целочисленных переменных, чего обычно в данное статье избегаем делать из методических соображений.

Задача 5. Шариковая ручка стоит 10 руб., гелевая – 50 руб., а перьевая – 80 руб. Какое наибольшее количество гелевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трёх типов, а истратить на них нужно ровно 1000 руб.?

Решение. Если куплено x шариковых ручек, y гелевых и z перьевых, то $x + y + z = 20$ и

$$10x + 50y + 80z = 1000,$$

т. е.

$$x + 5y + 8z = 100.$$

Вычитая из последнего уравнения первое, получим $4y + 7z = 80$. Следовательно, z делится на 4, т. е. $z = 4n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Значит, $4y + 7 \cdot 4n = 80$, откуда $y = 20 - 7n$. Тогда

$$x = 20 - y - z = 3n.$$

Все три числа тройки $(3n,\ 20 - 7n,\ 4n)$ положительны только при $n = 1$ и $n = 2$. Получаем, что есть ровно два решения: (3, 13, 4) и (6, 6, 8), а наибольшее возможное значение y равно 13.

Ответ: 13.

Во второй части статьи мы рассмотрим задачи, сводящиеся к уравнениям, для решения которых нет общего алгоритма. В этих случаях применяются такие методы, как полный или рациональной перебор случаев, разложение на множители, рассмотрение остатков от деления, явное выражение одной из переменных, использование алгебраических формул и оценок, упорядочивание, подбор решения. Начнём с задачи Московской математической регаты 2015/16 учебного года (7 класс, тур 4, задача 1, 65662), в которой перебор случаев возникает по ходу решения, а при исследовании получившегося уравнения можно или перебрать конечное число вариантов, или воспользоваться подходящей оценкой.

Задача 6. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается: либо на 1 дм^2 в обычном случае, либо в два раза – если желание было заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько – ещё всемеро, а еще через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова первоначальная площадь кожи?

Решение. Пусть первоначальная площадь кожи равна S дм^2 ($S > 0$). После того, как площадь уменьшилась втрое, а затем ещё всемеро, она стала равна $S/21$ дм^2. Это число должно быть целым, иначе делением пополам и вычитанием 1 невозможно получить 0. Рассмотрим первые 10 желаний. Среди них не может быть более одного заветного, так как после них площадь уменьшилась втрое, а $S/4 < S/3$. Рассмотрим два случая.

1) Если заветных желаний не было, то $S - 10 = S/3$, откуда $S = 15$.

Но это число не кратно 7, что противоречит условию уменьшения площади в 7 раз.

2) Пусть сначала было k обычных желаний, затем – заветное, а затем – ещё $9 - k$ обычных. Тогда

$$1/2(S - k) - (9 - k) = S/3,$$

откуда $S = 3(18 - k)$.

Поскольку k – целое число от 0 до 9, получаем оценку $9 \le 18 - k \le 18$, а на этом промежутке есть ровно одно число, которое кратно 7. Значит, $18 - k = 14$, поэтому $k = 4$. Следовательно, $S = 42$.

Ответ: 42.

Отметим, что вместо оценивания выражения $18 - k$ можно было перебрать все значения k от 0 до 9 и для каждого проверять делимость S на 7.

Следующая задача Турнира городов 1996/97 учебного года (8–9 классы, тренировочный вариант, задача 4, 98336) не только иллюстрирует метод разложения на множители, но и представляет интерес тем, что в ней целочисленность переменных требует отдельного обоснования.

Задача 7. Квадрат разрезали на квадратики, проводя разрезы параллельно его сторонам. Получили 24 единичных квадратика и один квадратик со стороной, длина которой отлична от 1. Найдите площадь исходного квадрата.

Решение. Назовём *особенным* квадратик со стороной, длина которой отлична от 1. Особенный квадратик не может прилегать ко всем сторонам исходного квадрата. Следовательно, к некоторой стороне квадрата прилегают только единичные квадратики, а значит, длина стороны квадрата – натуральное число. Далее, длина стороны особенного квадратика также натуральное число, так как является разностью длины стороны квадрата и некоторого числа единиц. Пусть длина стороны исходного квадрата равна k, а сторона особенного квадратика равна n. Тогда справедливо равенство $k^2 - n^2 = 24$. Поскольку

$$k^2 - n^2 = (k + n)(k - n),$$

числа $k + n$ и $k - n$ одной чётности, причём $k + n > k - n$, получаем

$$k + n = 6,\ k - n = 4$$

$$\text{или } k + n = 12,\ k - n = 2.$$

В первом случае $k = 5$, $n = 1$, что невозможно, так как по условию $n \ne 1$. Во втором случае $k = 7$, $n = 5$. Таким образом, площадь исходного квадрата равна 49.

Ответ: 49.

Отдельно следует упомянуть о задачах, в которых часть переменных целочисленные, а часть нет. Такова, например, задача Московской математической олимпиады 2021/22 учебного года (11 класс, первый день, задача 1, 67028). На её примере мы рассмотрим также подходы, связанные с алгебраическими преобразованиями выражений, выделением целой части у дробно-линейной функции.

Задача 8. В коллекции Алика есть два типа предметов: значки и браслеты. Значков больше, чем браслетов. Алик заметил, что если он увеличит количество браслетов в некоторое (не обязательно целое) число раз, не изменив количества значков, то в его коллекции будет 100 предметов. А если, наоборот, он увеличит в это же число раз первоначальное количество значков, оставив прежним количество браслетов, то у него будет 101 предмет. Сколько значков и сколько браслетов могло быть в коллекции Алика?

Решение. Пусть у Алика k значков и n браслетов, а увеличение происходит в t раз. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} k+nt=100, \\ tk+n=101, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+n\dfrac{101-n}{k}=100, \\ t=\dfrac{101-n}{k}. \end{cases}$$

Заметим, что для каждой пары $(k,\ n)$ решений первого уравнения можно найти значение t из второго уравнения. Поэтому остаётся рассмотреть первое уравнение (второе при любых натуральных k, n всегда имеет решение):

$$k+n\frac{101-n}{k}=100 \Leftrightarrow k^2+n(101-n)=$$
$$=100k \Leftrightarrow k^2-n^2-100(k-n)+n=0.$$

Полагая $u = k + n$, $v = k - n$ (u и v – натуральные числа, так как $k > n$ по условию), преобразуем уравнение:

$$uv-100v+\frac{u-v}{2}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2uv-201v+u=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u=\frac{201v}{2v+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2u=201-\frac{201}{2v+1}.$$

Поскольку $201 = 3 \cdot 67$, возможны только два случая:

$$1. \begin{cases} 2v+1=3, \\ 2u=201-67 \end{cases} \Leftrightarrow u=67, v=1;$$

$$2. \begin{cases} 2v+1=67, \\ 2u=201-3 \end{cases} \Leftrightarrow u=99,\ v=33.$$

В первом случае находим $k = 34$, $n = 33$, а во втором получаем $k = 66$, $n = 33$.

Ответ: 34 значка и 33 браслета или 66 значков и 33 браслета.

Нередко в текстовых задачах ставится вопрос о существовании той или иной конструкции. Если задача приводит к уравнению (или уравнениям) в целых числах, то для доказательства отсутствия решений часто бывает полезно рассмотреть остатки по некоторому модулю или применить метод бесконечного спуска. В случае положительного ответа на вопрос о существовании конструкции самый простой способ обоснования ответа состоит в предъявлении примера, но для нахождения этого примера иногда приходится проделать объёмные выкладки, связанные с преобразованием выражений и учётом делимости. Рассмотрим ещё одну задачу Турнира имени М.В. Ломоносова (2009 г., задача 8, 115392).

Задача 9. Может ли квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами обладать следующим свойством: сумма его коэффициентов равна одному из его корней, а произведение – другому корню?

Решение. Пусть a – старший коэффициент квадратного трёхчлена, m – корень, равный сумме коэффициентов, n – корень, равный их произведению. Коэффициенты трёхчлена целые, поэтому их сумма и произведение m, n тоже целые. Согласно теореме Виета, уравнение имеет вид

$$ax^2 - a(m+n)x + amn = 0.$$

Поэтому фактически Вася утверждает, что

$$m = a - a(m+n) + amn,$$
$$n = -a^3(m+n)mn.$$

Перепишем первое равенство в виде

$$m = a(1-m)(1-n),$$

т. е.

$$1 = a(1 - m)(1 - n) + (1 - m).$$

Таким образом, 1 делится на $1 - m$, поэтому $m = 0$ или 2. Если $m = 0$, то из второго равенства находим $n = 0$, а тогда из первого равенства получаем $a = 0$, что невозможно для старшего коэффициента квадратного трёхчлена. Остаётся рассмотреть случай $m = 2$. Перепишем второе равенство в виде

$$n(1 + 2a^3(n + 2)) = 0.$$

Получаем $n = 0$, так как второй множитель нечётен и не может равняться нулю. Теперь из первого равенства находим, что $a = -2$, и искомый трёхчлен равен $-2x^2 + 4x$.

Ответ: может.

Отметим, что формально при решении задачи мы получили двучлен, который, конечно, является квадратным трёхчленом с целыми коэффициентами, если его явно записать в виде $-2x^2 + 4x + 0$.

Обсудим задачу заочного этапа олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» 2015/2016 учебного года (9 класс, задача 7, [5]).

Задача 10. Несколько автобусов (больше трёх) в начале рабочего дня поочерёдно выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из одного пункта в другой. По прибытии в конечный пункт каждый из них, не задерживаясь, разворачивается и едет в обратном направлении. Все автобусы делают одинаковое число рейсов туда и обратно, причём первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Сколько было автобусов и сколько рейсов совершил каждый из них?

Решение. Обозначим количество автобусов через n и количество рейсов через k. Изобразим график движения автобусов на координатной плоскости, где по оси абсцисс откладывается время, отсчитываемое с момента выезда первого автобуса, а по оси ординат расстояние, на которое удалился автобус от пункта отправления. График движения каждого автобуса представляет собой $2k$-звенную ломаную (см. рис. 1), получаемую сдвигом вправо графика движения первого автобуса, причём по условию задачи величина каждого сдвига меньше расстояния по оси абсцисс между точками ломаной, соответствующими возвращению автобуса в пункт отправления. Значит, график движения каждого автобуса, начиная со второго, пересечёт график движения первого автобуса ровно в $2k - 1$ точках. Более того, аналогичное рассуждение показывает, что каждые два автобуса за рабочий день встречаются $2k - 1$ раз.

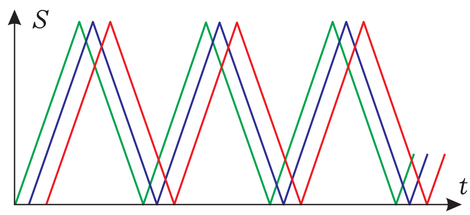

Рис. 1

Далее, поскольку всякая встреча двух автобусов подсчитывается обоими водителями, т. е. учитывается дважды, сумма чисел всех водителей будет равна удвоенному произведению количества способов выбрать два автобуса из n на количество их встреч.

Таким образом, получаем уравнение

$$n(n-1)(2k-1) = 300.$$

Число 300 представлено в виде произведения трёх чисел, два из которых последовательные ($n-1$ и n), а третье нечётно ($2k-1$). Начиная с $n=4$ выпишем все возможные произведения $(n-1)n$, меньшие 300:

$$3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ 5\cdot 6,\ 6\cdot 7,\ 7\cdot 8,\ 8\cdot 9,\ 9\cdot 10,$$

$$10\cdot 11,\ 11\cdot 12,\ 12\cdot 13,\ 13\cdot 14,$$

$$14\cdot 15,\ 15\cdot 16,\ 16\cdot 17.$$

Для первых двух произведений получаем равенства $300 = 3\cdot 4\cdot 25$ и $300 = 4\cdot 5\cdot 15$, и эти разложения удовлетворяют рассматриваемому уравнению. Третье произведение приводит к разложению $300 = 5\cdot 6\cdot 10$, которое не удовлетворяет уравнению в силу чётности последнего множителя. Наконец, остальные произведения содержат хотя бы один множитель, не являющимся делителем 300.

Итак, существуют ровно два варианта: $n=4$, $k=13$ или $n=5$, $k=8$.

Ответ: 4 автобуса, 13 рейсов или 5 автобусов, 8 рейсов.

В заключение добавим, что последняя задача относится к так называемым задачам с неоднозначным ответам, разноплановая подборка которых представлена в статье [3].

Список литературы

1. *Бегунц А.В., Бородин П.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панфёров В.С., Сергеев И.Н., Шейпак И.А.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2019) – М.: МЦНМО, 2020. – 232 с.

2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М. Л.: ГИТТЛ, 1952. – 180 с.

3. *Бегунц А.В., Горяшин Д.В.* Задачи с неоднозначным ответом // Математика. Методический журнал для учителей математики, 2021, №7, с. 56–62.

4. Сайт «Задачи»: http://www.problems.ru

5. Официальный сайт олимпиады «Покори Воробьёвы горы!»: http://pvg.mk.ru

МУДРЫЕ МЫСЛИ

Величайшим достижением человеческого гения является то, что человек может понять вещи, которые он уже не в силах вообразить.

Свобода творчества — свобода делать ошибки.

– Подумать только! И как люди смогли построить эти огромные пирамиды?!

– Их строили задолго до того как Ньютон открыл закон всемирного тяготения, так что проблем с весом камней тогда не наблюдалось.