Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал», автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ», лауреат премии Правительства РФ 2020 г. в области образования

Методы рационализации
Часть пятая. Уравнения и неравенства, содержащие монотонные функции, разность степеней произвольных функций

1. Монотонные функции в уравнениях. Монотонные функции. Единственность значений монотонной функции

Пусть $y(x)$ – строго монотонная функция.

Свойства монотонных функций изучаются в школе и прописаны во всех школьных учебниках.

Приведём для примера определение возрастающей функции.

Функция $f(x)$, определённая на некотором промежутке X (в ОДЗ, или $D(f)$), называется строго монотонно возрастающей на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1, x_2 из этого промежутка из неравенства $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$ – рис. 1.

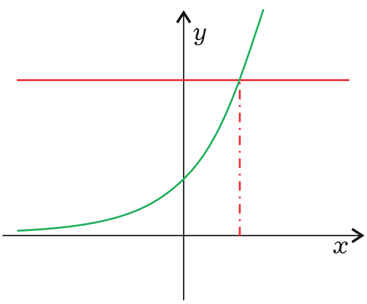

Рис.1

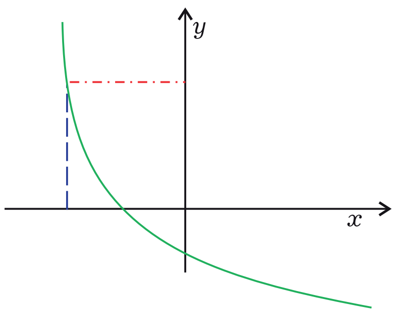

Рис.1а

В дальнейшем мы будем писать вместо «строго монотонно » просто «монотонно».

Если функция монотонна, то для любых $x_1 \in D(f), x_2 \in D(f)$ следует, что

$$\boxed{f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2} \qquad (1)$$

В частности, пусть нам задано уравнение $f(x)=A$, где $f(x)$ монотонная функция. Если существует число a, такое, что $f(a)=A$, – уравнение примет вид $f(x)=f(a)$, а тогда, в силу (1),

$$\boxed{f(x)=f(a) \Leftrightarrow x=a} \qquad (2)$$

Практически все элементарные функции, изучаемые в школе, строго монотонны.

Пример 1. Решите уравнение $4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right|$.

Этот пример довольно своеобразный.
Решается с помощью простого раскрытия модулей. Монотонная функция сразу не просматривается.

► *Первый способ* (раскроем модули)

Громоздкое уравнение. С чего начать? Не ясно. Начнём с самого простого – запишем ОДЗ: $5x+14 \geq 0$ (без особой необходимости неравенства в ОДЗ уравнений решать не надо!). Ничего не прояснилось. Делать нечего – аккуратно раскроем $|x-1|$ и $\left|\sqrt{5x+14}-1\right|$:

$$4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3\left|\sqrt{5x+14}-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{5x+14}-1>0, \\ x=\sqrt{5x+14} \Leftrightarrow x=7; \end{cases} \\ \begin{cases} x<1, \\ \sqrt{5x+14}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{13}{5}, \\ 7x-6=\sqrt{5x+14} \geq 1 \Rightarrow 7x-6 \geq 1 \Rightarrow \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5x+14}-1<0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{13}{5} \Rightarrow x<1, \\ x=\sqrt{5x+14} \geq 0 \Rightarrow \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=7.$$

Ну, что же? Уравнение решилось.

Ответ. $\{7\}$.

Все верно, но можно сделать проще.

Второй способ (воспользуемся монотонностью)

Если присмотреться к уравнению, можно заметить «сходство» между левой и правой частями: зависимость от x и от $\sqrt{5x+14}$ одинакова. Это случайно? Не следует ли что-нибудь «хорошее» из этого? Часто так записываются уравнения с монотонными функциями.

Рассмотрим функцию $y(x)=4x-3|x-1|=\left[\begin{array}{l}x+3, x\geq 1,\\ 7x-3, x<1\end{array}\right.$ – рис. 2

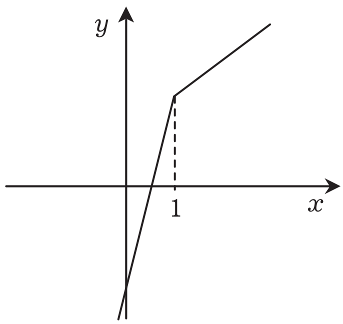

Рис. 2

Она непрерывна и строго возрастает при $x\geq 0$.

Значит, $y(x)=y\left(\sqrt{5x+14}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{5x+14}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ x^2-5x-14=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm 9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=7.$$

Ответ. $\{7\}$.

Примечание. В последние годы функции, графиком которых являются ломаные, встречаются всё чаще. График функции $y(x)=4x-3|x-1|$ – ломаная с точкой «излома» при $x=1$. Причём в любом случае наклон составляющих отрезков прямых положителен: 4 ± 3. А это значит, что функция $y(x)=4x-3|x-1|$ монотонно возрастает на всей оси. ◄

Пример 2. Решите уравнение $(4x-10)\left(1+\sqrt{9+(4x-10)^2}\right)+x\left(1+\sqrt{9+x^2}\right)=0.$

В отличие от предыдущего, этот пример алгоритмично не решается. Зато хорошо просматривается монотонность.

► Функция $y(x)=x\left(1+\sqrt{9+x^2}\right)$ нечётная и монотонно возрастает на всей оси. Перепишем уравнение: $x\left(1+\sqrt{9+x^2}\right)=(10-4x)\left(1+\sqrt{9+(10-4x)^2}\right)$

В силу (1), $x\left(1+\sqrt{9+x^2}\right)=(10-4x)\left(1+\sqrt{9+(10-4x)^2}\right)\Leftrightarrow x=10-4x\Leftrightarrow x=2$

Ответ. $\{2\}$. ◀

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[4]{7-2x}$.

▶ *Первый способ*

Заметим, что $y_1=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-4}$ монотонно возрастает при $x\geq -1$, а $y_2=\sqrt[4]{7-2x}$ монотонно убывает при $x\leq 3{,}5$. Значит, если они пересекаются, то только один раз. Видно, что $y_1(3)=y_2(3), -1<3<3{,}5$.

Ответ. $\{3\}$.

Конечно, корни угадываются далеко не всегда.

Второй способ

Перенесём всё в одну сторону и попробуем проверить монотонность.

Функция $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[4]{7-2x}$ монотонно возрастает на отрезке $[-1;3{,}5]$.

Видно, что $y(3)=0$. Поэтому

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[4]{7-2x}-0=0\Leftrightarrow y(x)-y(3)=0\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ. $\{3\}$. ◀

Пример 4. Решите уравнение $x^5+4x^3-64=0$.

▶ *Первый способ* (классический)

Один корень уравнения угадывается: $x=2$.

Разделим многочлен x^5+4x^3-64 на $x-2$:

$$x^5+4x^3-64=(x-2)\left(x^4+2x^3+8x^2+16x+32\right).$$

Найти корни большой скобки уже весьма проблематично. Что делать? Тупик! Будем пробовать другие способы.

Второй способ (используем монотонность)

Заметим (ведь мы занимаемся монотонными функциями), что $y(x)=x^5+4x^3$ монотонно возрастает на числовой оси, и мы уже нашли, что $y(2)=64$. А так как монотонная функция любое своё значение принимает только один раз, то получаем: $x^5+4x^3-64=0\Leftrightarrow y(x)-y(2)=0\Leftrightarrow x-2=0$.

Ответ. $\{2\}$. Здорово? ◀

2. Произвольные монотонные функции в неравенствах. Правила П Мн1 и П Мн2

$$\text{П Мн1. } f(x)\uparrow:\quad f(x_2)-f(x_1)\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x_2-x_1\vee 0$$

$$\text{П Мн2. } f(x)\downarrow:\quad f(x_2)-f(x_1)\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x_1-x_2\vee 0$$

Заметим, что если функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке X, то из неравенства $f(x_2)>f(x_1)$ следует, что $x_2>x_1$, а из неравенства $f(x_2)<f(x_1)$ следует, что $x_2>x_1$, – рис. 3.

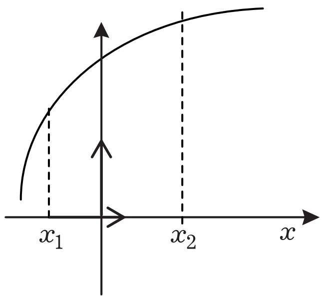

Рис. 3

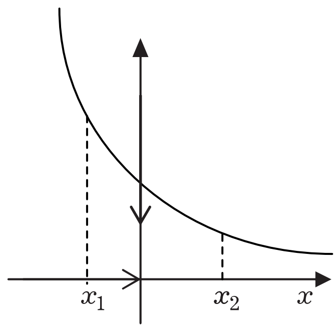

Рис. 3а

Учитывая, что $f(x_2)=f(x_1)\Leftrightarrow x_2=x_1$, получаем, **Правило П Мн1:**

$$\boxed{\text{П Мн1. } f(x)\uparrow:\quad f(x_2)-f(x_1)\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x_2-x_1\vee 0}$$

Это значит, что если функция $f(x)$ монотонно возрастает в ОДЗ, то знак разности значений функции $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком разности значений аргументов x_2-x_1. Разность $f(x_2)-f(x_1)$ и разность аргументов x_2-x_1 обращаются в 0 одновременно.

Если функция монотонно убывает, то всем известно, что меняется знак в неравенстве для аргументов. Поэтому можно записать

Правило П Мн2

$$\boxed{\text{П Мн2. } f(x)\downarrow:\quad f(x_2)-f(x_1)\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x_1-x_2\vee 0,}$$

т. е., если функция $f(x)$ монотонно убывает в ОДЗ, то знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком *обратной* разности x_1-x_2. Разность $f(x_2)-f(x_1)$ и разность аргументов x_1-x_2 обращаются в 0 одновременно.

Пример 5. Решите неравенство

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}+\sqrt[11]{2-3x^2}+\log_{11}\frac{2x^2+3x+12}{3x^2+2}\geq 0.$$

► Перепишем неравенство

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}+\sqrt[11]{2-3x^2}+\log_{11}\frac{2x^2+3x+12}{3x^2+2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[11]{2x^2+3x+8}-\sqrt[11]{3x^2-2}+\log_{11}\left(2x^2+3x+12\right)-\log_{11}\left(3x^2+2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[11]{\left(2x^2+3x+12\right)-4}+\log_{11}\left(2x^2+3x+12\right)\geq\sqrt[11]{\left(3x^2+2\right)-4}+\log_{11}\left(3x^2+2\right)$$

Функция $y(t)=\sqrt[11]{t-4}+\log_{11}t$ монотонно возрастает при $t>0$. И так как $y(t_2)\geq y(t_1)\Leftrightarrow t_2\geq t_1$, то $2x^2+3x+12\geq 3x^2+2\Leftrightarrow x^2-3x-10\leq 0\Leftrightarrow x\in[-2;5]$.

Ответ. $[-2;5]$. ◄

3. Неравенства вида $\frac{f(x)-f(y)}{h(x)}\vee 0$

Зачем нужны правила?

Правила дают возможность решить не только неравенства вида $f(x)-f(y)\vee 0$, но и гораздо более сложные.

Например,

$$f(x)\uparrow:\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h(x)}\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{x_2-x_1}{h(x)}\vee 0$$

$$f(x)\downarrow:\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h(x)}\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{x_1-x_2}{h(x)}\vee 0$$

Это следует из того, что знаки числителей, в силу правил П Мн1 и П Мн2, совпадают со знаками разности аргументов для монотонно возрастающих функций или с противоположной разностью для монотонно убывающих.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\arcsin\left(x^2-2x\right)-\arcsin\left(x^2+x-1\right)}{\lg\left(6x^2+3\right)-\lg(7x+1)}\leq 0$$

►Найдём ОДЗ*:

$$\begin{cases}-1\le x^2-2x\le 1,\\ -1\le x^2+x-1\le 1,\\ 7x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right],\\ x\in[-2;-1]\cup[0;1],\\ x>-\dfrac{1}{7}\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;1].$$

Так как $y_1(t)=\arcsin t,\ t\in[-1;1],$ и $y_2(t)=\lg t,\ \ t>0,$ монотонно возрастают в ОДЗ*, то, в силу правила Мн1, при $t\in(0;1]$ выполнено:

$$\frac{\arcsin\left(x^2-2x\right)-\arcsin\left(x^2+x-1\right)}{\lg\left(6x^2+3\right)-\lg(7x+1)}\le 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}\frac{x^2-2x-\left(x^2+x-1\right)}{\left(6x^2+3\right)-(7x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-1}{(2x-1)(3x-2)}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Учтя ОДЗ*, получаем **Ответ.** $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right]$. ◄

Правило П Мн1*

Если $f(x)$ монотонно возрастает в ОДЗ и известно значение функции в некоторой точке a, то знак разности значений $f(x)-f(a)$ совпадает со знаком разности аргументов $x-a$ в ОДЗ, или, в современных обозначениях,

$$\boxed{f(x)\uparrow:f(x)-f(a)\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}x-a\vee 0.}$$

Для монотонно убывающих функций – рис.1а

Правило П Мн2*

Если $f(x)$ монотонно убывает в ОДЗ и известно значение функции в некоторой точке a, то знак разности значений $f(x)-f(a)$ совпадает со знаком обратной разности аргументов $x-a$ в ОДЗ, или, в современных обозначениях,

$$\boxed{f(x)\downarrow:f(x)-f(a)\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}a-x\vee 0.}$$

Пример 7. Решите неравенство $x^5+x^3+1-\sqrt{10-x}\ge 0.$

►Заметим, что $y(x)=x^5+x^3+1-\sqrt{10-x}$ монотонно возрастает при $x\le 10,$ причём $y(1)=0.$

Поэтому $y(x)-y(1)=x^5+x^3+1-\sqrt{10-x}-0\ge 0\Leftrightarrow 1\le x\le 10.$

Ответ. $[1;10]$. ◄

4. Неравенства вида $\frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\vee 0$

Рассмотрим неравенство $\frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\geq 0(\leq 0)$, или, в современных обозначениях, $\frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\vee 0$.

Так как, в силу **П Мн1***, для монотонно возрастающей функции $f(x)$ знак разности значений $f(x)-f(a)$ совпадает со знаком разности аргументов $x-a$ в ОДЗ, то $\frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\geq 0(\leq 0)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{x-a}{h(x)}\geq 0(\leq 0)$, или, в современных обозначениях,

$$\boxed{f(x)\uparrow:\quad \frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{x-a}{h(x)}\vee 0} \qquad (2^*)$$

Если $f(x)$ монотонно убывающая функция в ОДЗ, то

$$\boxed{f(x)\downarrow:\quad \frac{f(x)-f(a)}{h(x)}\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{a-x}{h(x)}\vee 0} \qquad (2^{**})$$

Пример 9. Решите неравенство $\frac{\sqrt[2022]{x}-\sqrt[2022]{\frac{\pi}{2}-x}}{\sin x-\frac{1}{2}}\leq 0.$

► Найдём ОДЗ*: $\begin{cases}x\geq 0,\\ \frac{\pi}{2}-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

Числитель и знаменатель монотонно возрастают на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому

$$\frac{\sqrt[2022]{x}-\sqrt[2022]{\frac{\pi}{2}-x}}{\sin x-\frac{1}{2}}\leq 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt[2022]{x}-\sqrt[2022]{\frac{\pi}{2}-x}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{6}}\leq 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{6}}\leq 0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]\in ОДЗ^*.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$. ◄

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{x^3+3x+2\sqrt[3]{x-4}-34}{\sqrt{x+5}+2x-11}\ge 0.$

►Заметим, что $y_1(x)=x^3+3x+2\sqrt[3]{x-4}$ и $y_2=\sqrt{x+5}+2x$ монотонно возрастают как суммы монотонно возрастающих функций на промежутке $[-5;+\infty)$.

При этом $y_1(3)=34$, а $y_2(4)=11$. Поэтому, в силу П Мн1*, знак разности $y_1(x)-y_1(3)$ совпадает со знаком разности аргументов $x-3$, а знак разности $y_2(x)-y_2(4)$ совпадает со знаком разности аргументов $x-4$:

$$\frac{x^3+3x+2\sqrt[3]{x-4}-34}{\sqrt{x+5}+2x-11}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5\ge 0, \\ \dfrac{x-3}{x-4}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-5;3]\cup(4;+\infty).$$

Ответ. $[-5;3]\cup(4;+\infty)$. ◄

Пример 10. (МФТИ) Решите неравенство $\dfrac{\left(\sqrt{x+4}+x-2\right)\left(\sqrt{4x+9}+x-3\right)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}}\le 0.$

► *Первый способ*

Заметим, что $y_1=\sqrt{x+4}+x$ и $y_2=\sqrt{4x+9}+x$ монотонно возрастают при $x\ge-\dfrac{9}{4}$.

При этом $y_1(0)=2$, $y_2(0)=3$. Значит, в силу П Мн1*,

$$y_1(x)-y_1(0)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x-0\vee 0,\quad y_2(x)-y_2(0)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x-0\vee 0.$$

Поэтому

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}+x-2\right)\left(\sqrt{4x+9}+x-3\right)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)(x-0)\le 0, \\ 4x+9\ge 0, \\ 6-x-4x^2-x^3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ. $\{0\}$.

Второй способ

ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x+9\ge 0\Rightarrow x+4>0, \\ 6-x-4x^2-x^3>0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-4;-3)\cup(-2;1)\Rightarrow x<2\Rightarrow x<3.$$

Поэтому умножим каждую скобку в числителе на положительное сопряжённое выражение:

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}+x-2\right)\left(\sqrt{4x+9}+x-3\right)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}}\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left(x+4-x^2+4x-4\right)\left(4x+9-x^2+6x-9\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-5)(x-10)\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x^2\le 0 \Leftrightarrow x=0\in ОДЗ$$

Ответ. $\{0\}$. ◄

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{4}{x}\le\sqrt{x+2}$.

► *Первый способ* (используем монотонность)

Перепишем неравенство $\dfrac{4}{x}\le\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\dfrac{x\sqrt{x+2}-4}{x}\ge 0.$

Функция $y(x)=x\sqrt{x+2}-4$ монотонно возрастает в ОДЗ и $y(2)=0$. Так как $y(x)-y(2)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x-2\vee 0,$ то

$$\frac{4}{x}\le\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{x+2}-4}{x}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{x}\ge 0,\\ x\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2;0)\cup[2;+\infty).$$

Ответ. $[-2;0)\cup[2;+\infty)$.

Второй способ (графический)

Этот пример довольно красиво можно решить графически. Построим эскизы графиков функций $y_1=\dfrac{4}{x}$ и $y_2=\sqrt{x+2}$ – рис.4

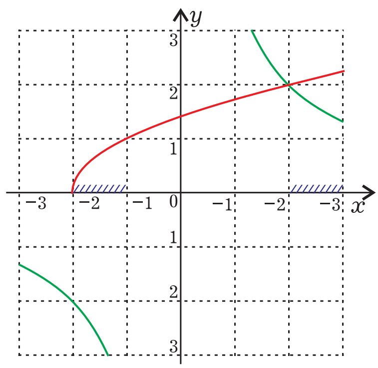

Рис. 4

Видно, что $x\in[-2;0)\cup[2;+\infty)$. **Ответ.** $[-2;0)\cup[2;+\infty)$. ◄

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}}\ge 0$

► Найдём ОДЗ*: $5-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\Rightarrow x<3.$

Первый способ

Умножим числитель на сопряжённое выражение, а в знаменателе превратим разность в произведение:

$$\frac{(3-x)-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{x^2-3x+2}{\sin\frac{3x-12}{8}\sin\frac{x-2}{8}}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sin\frac{3x-12}{8}\sin\frac{x-2}{8}}\le 0$$

Так как x изменяется на конечном отрезке, то выясним, в каких пределах изменяются аргументы наших тригонометрических функций в ОДЗ:

$$\frac{-3\sqrt{5}-12}{8}\le\frac{3x-12}{8}\le\frac{3\sqrt{5}-12}{8},\quad \frac{-\sqrt{5}-2}{8}\le\frac{x-2}{8}\le\frac{\sqrt{5}-2}{8}.$$

Отсюда следует, что $-\pi<\frac{3x-12}{8}<0,\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{x-2}{8}<\frac{\pi}{2}.$

Что же отсюда может следовать? О! Ясно! Тогда $\sin\frac{3x-12}{8}<0$ на всем этом промежутке, а поэтому

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(x-1)(x-2)}{\sin\frac{x-2}{8}}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ \left\{\begin{array}{l} x<2\Rightarrow \sin\frac{x-2}{8}<0, \\ x\ge 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;+\infty),$$

Учтем ОДЗ* и получим **Ответ.** $x\in[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right].$

Второй способ (с учётом монотонности функций)

Попробуем применить теорию монотонных функций. Так как x в ОДЗ* изменяется на конечном отрезке, то выясним, в каких пределах при этом изменяются аргументы косинусов:

$$-\pi<\frac{-2\sqrt{5}-7}{4}\le\frac{2x-7}{4}\le\frac{2\sqrt{5}-7}{4}<0,\quad -\pi<\frac{-\sqrt{5}-5}{4}\le\frac{x-5}{4}\le\frac{\sqrt{5}-5}{4}<0,$$

т. е. аргументы косинусов принадлежат промежутку $(-\pi;0)$, а здесь $\cos t$ монотонно возрастает, а потому знак разности $\cos u-\cos v$ совпадает со знаком разности $(u-v)$.

Поэтому $$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(3-x)^2-\left(5-x^2\right)}{\frac{2x-7}{4}-\frac{x-5}{4}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;+\infty).$$

Учтем ОДЗ* и получим, что $x\in[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right]$. Вот и всё решение!

Ответ. $[1;2)\cup\left(2;\sqrt{5}\right]$. ◄

5. Разности натуральных степеней произвольных функций в неравенствах.

Правила П1 – П4

Так как функция $y=x^{2n+1}$ при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ монотонно возрастает на всей числовой оси, то:
во-первых, любое своё значение она принимает единственный раз, т. е.

$$x_1^{2m+1}=x_2^{2m+1}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

во-вторых, в силу возрастания функции, большему значению аргумента соответствует и большее значение функции; и, наоборот, большему значению функции соответствует и большее значение аргумента:
$x_2^{2m+1}-x_1^{2m+1}>0(<0)\Leftrightarrow x_2-x_1>0(<0)$, или, в современных обозначениях, $x_2^{2m+1}-x_1^{2m+1}\vee 0\Leftrightarrow x_2-x_1\vee 0$.

Поэтому на множестве X, где определены функции $f(x)$ и $g(x)$ (ОДЗ уравнения), имеет место **Правило П1**

$$\text{П1.}\quad f^{2n+1}(x)-g^{2n+1}(x)\vee 0\Leftrightarrow f(x)-g(x)\vee 0$$

Мы будем опускать слова «в ОДЗ», если равносильное соотношение выполнено там, где ОДЗ правой и левой частей совпадают.

Если же соотношение выполнено там, где входящие в соотношение функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют дополнительным условиям (например, неотрицательность в ОДЗ), то эти ограничения будут помечаться над знаками $\Leftrightarrow$.

В данном случае $f(x)$, $g(x)$ и $f^{2n+1}(x), g^{2n+1}(x)$ существуют одновременно.

Заметим, что $f(x)+g(x)\equiv f(x)-(-g(x))$,

$$f^{2n+1}(x)+g^{2n+1}(x)\equiv f^{2n+1}(x)-(-g(x))^{2n+1}$$

Поэтому имеет место и Правило 1*

$$\text{П1*}.\ f^{2n+1}(x)+g^{2n+1}(x)\vee 0\Leftrightarrow f(x)+g(x)\vee 0$$

Теперь заметим, что так как при $x\geq 0$ функция $y=x^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$ монотонно возрастает, то справедливы следующие равносильные переходы:

П2. Если $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$, то знак разности $f^{2n}(x)-g^{2n}(x)$ и знак разности $f(x)-g(x)$ совпадают, и разности $f^{2n}(x)-g^{2n}(x)$ и $f(x)-g(x)$ обращаются в 0 одновременно, или, в современных обозначениях,

$$\text{П2. } f^{2n}(x)-g^{2n}(x)\vee 0 \overset{f(x)\ge 0,\, g(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)\vee 0$$

В частности, так как $f^2(x)\ge 0, g^2(x)\ge 0$, то можно записать *интересное* Правило П3

$$\text{П3. } f^{2n}(x)-g^{2n}(x)\vee 0 \Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)\vee 0,$$

Видно, что из П1 и П2 следует

Правило П4

$$\text{П4. } f^{n}(x)-g^{n}(x)\vee 0 \overset{f(x)\ge 0,\, g(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)\vee 0, \text{ т. е.}$$

если $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, то для *любого* $n\in\mathbb{N}$ знак разности $f^n(x)-g^n(x)$ и знак разности $f(x)-g(x)$ совпадают.

Мы получили правила для произвольных функций $f(x)$, $g(x)$ в ОДЗ, т. е. на множестве, где обе функции определены (или, если это необходимо, и неотрицательны). Но, как показывает практика, не любой их запомнит и поймёт, как их лучше всего применить. Поэтому рассмотрим отдельно их применение к различным элементарным функциям.

Мы увидим при этом, что иногда для разных функций можно будет воспользоваться более удобными правилами – рассуждениями.

6. Рациональные неравенства

Приведём примеры.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{\left(x^2-3x+1\right)^{2022}-\left(3x^2+x-5\right)^{2022}}{x^{2021}+\left(4x^2+x-6\right)^{2021}}\ge 0.$

► Воспользуемся правилами П3 и П1*:

$$\frac{\left(x^2-3x+1\right)^{2022}-\left(3x^2+x-5\right)^{2022}}{x^{2021}+\left(4x^2+x-6\right)^{2021}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-3x+1\right)^{2}-\left(3x^2+x-5\right)^{2}}{x+\left(4x^2+x-6\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(2x^2-x-2\right)\left(x^2+2x-3\right)}{2x^2+x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)(x+3)(x-1)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-3;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4};1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right].$$

Ответ. $\left[-3;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4};1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right].$

Попробуйте решить обобщённым методом интервалов. Придётся нелегко.◄
Теперь рассмотрим ещё один пример.

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{\left|2x^2-11x-13\right|^{2021}-\left|3x^2+8x-1\right|^{2021}}{\left(\sqrt{42-x^2+11x}\right)^{2021}-\left(\sqrt{49-x^2}\right)^{2021}}\le 0.$

►Найдём ОДЗ*:

$$\begin{cases}42-x^2+11x\ge 0,\\ 49-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-11x-42\le 0\Leftrightarrow x\in[-3;14],\\ x^2-49\le 0\Leftrightarrow x\in[-7;7]\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-3;7].$$

Оформим этот пример по-другому – воспользуемся правилами *П 1**, затем *П 2*, не называя и не формулируя их. Проверяющий ЕГЭ может не знать их, но это его проблема.

$$\frac{\left|2x^2-11x-13\right|^{2021}-\left|3x^2+8x-1\right|^{2021}}{\left(\sqrt{42-x^2+11x}\right)^{2021}-\left(\sqrt{49-x^2}\right)^{2021}}\le 0\Leftrightarrow\frac{\left|2x^2-11x-13\right|-\left|3x^2+8x-1\right|}{\sqrt{42-x^2+11x}-\sqrt{49-x^2}}\le 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2x^2-11x-13+3x^2+8x-1\right)\left(2x^2-11x-13-3x^2-8x+1\right)}{\left(42-x^2+11x-49+x^2\right)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\left(5x^2-3x-14\right)\left(x^2+19x+12\right)}{(11x-7)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\left(x+\frac{7}{5}\right)(x-2)\left(x-\frac{-19-\sqrt{313}}{2}\right)\left(x-\frac{-19+\sqrt{313}}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{11}\right)}\ge 0\overset{\text{с учётом ОДЗ*}}{\Leftrightarrow}$$

$$x\in\left[-3;\frac{-19+\sqrt{313}}{2}\right]\cup\left[-\frac{7}{5};\frac{7}{11}\right)\cup[2;7]-\text{рис.5}$$

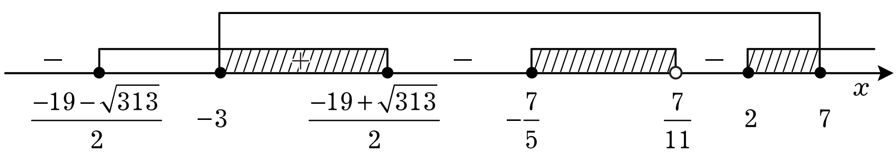

Рис. 5

Ответ. $\left[-3;\frac{-19+\sqrt{313}}{2}\right]\cup\left[-\frac{7}{5};\frac{7}{11}\right)\cup[2;7].$

7. Иррациональные неравенства. Правила П К 1 –П К3

В роли $f(x)$ и $g(x)$ в правилах могут выступать разные функции, в частности, корни.

Правила П1 – П4 можно переформулировать, поменяв местами правую и левую части, чтобы они были более наглядными – тогда они примут вид П К1 – П К3 (П К1 – правило 1 для корней).

$$\text{П К1.}\quad \sqrt[2n+1]{f(x)}-\sqrt[2n+1]{g(x)}\vee 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)\vee 0$$

$$\text{П К1*.}\quad \sqrt[2n+1]{f(x)}+\sqrt[2n+1]{g(x)}\vee 0 \Leftrightarrow f(x)+g(x)\vee 0$$

$$\text{П К2.}\quad \sqrt[2n]{f(x)}-\sqrt[2n]{g(x)}\vee 0 \overset{f(x)\ge 0, g(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)\vee 0$$

$$\text{П К3.}\quad f^{\frac{1}{n}}(x)-g^{\frac{1}{n}}(x)\vee 0 \overset{f(x)\ge 0, g(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)\vee 0$$

Заметим, что эти же правила можно вывести из того, что $y=\sqrt[2n+1]{x}$ монотонно возрастает на всей оси, а функция $y=\sqrt[2n]{x}$ монотонно возрастает при $x\ge 0$.

Когда правила П1-П4 работают?

Очень эффективно они работают при решении неравенств вида $F(x)\vee 0$, где присутствуют в виде множителей разности вида $\sqrt[2n+1]{f(x)}-\sqrt[2n+1]{g(x)}$ или $\sqrt[2n]{f(x)}-\sqrt[2n]{g(x)}$.

Тогда при применении правил удобно будет заменять разности или суммы корней целыми степенями.

Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{16}-\left(\sqrt{x-2x^2+6}\right)^{16}}{\left(\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}\right)^{13}+\left(\sqrt[3]{6x^2+8}\right)^{13}}\ge 0.$

► У квадратных корней есть ОДЗ – поэтому сначала найдём ОДЗ*, а затем уже будем работать с правилами.

$$\text{ОДЗ*:}\ \begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ x-2x^2+6\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1{,}5;-1]\cup[1;2].$$

Для числителя воспользуемся П3:

Знак разности $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{16}-\left(\sqrt{x-2x^2+6}\right)^{16}$ совпадает со знаком разности $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2}-\left(\sqrt{x-2x^2+6}\right)^{2}$ в ОДЗ*.

Для знаменателя сначала воспользуемся П1*:

Знак суммы $\left(\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}\right)^{13}+\left(\sqrt[3]{6x^2+8}\right)^{13}$. совпадает со знаком суммы $\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}+\sqrt[3]{6x^2+8}$, а затем, согласно правилу ПК1*, знак суммы $\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}+\sqrt[3]{6x^2+8}$ совпадает со знаком суммы $\left(\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}\right)^3+\left(\sqrt[3]{6x^2+8}\right)^3$.

Поэтому

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{16}-\left(\sqrt{x-2x^2+6}\right)^{16}}{\left(\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}\right)^{13}+\left(\sqrt[3]{6x^2+8}\right)^{13}}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2}-\left(\sqrt{x-2x^2+6}\right)^{2}}{\sqrt[3]{4x^3-11x^2+1}+\sqrt[3]{6x^2+8}}\geq 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{3x^2-x-7}{4x^3-11x^2+1+6x^2+8}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\left(x-\frac{1-\sqrt{85}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{85}}{6}\right)}{(x+1)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$x\in\left[\frac{1-\sqrt{85}}{6};-1\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{85}}{6};+\infty\right)$$

Учтём ОДЗ* - рис.

$$\frac{1-\sqrt{85}}{6}\vee-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1-\sqrt{85}\vee-9\Leftrightarrow 10>\sqrt{85}\Rightarrow\frac{1-\sqrt{85}}{6}>-\frac{3}{2}$$

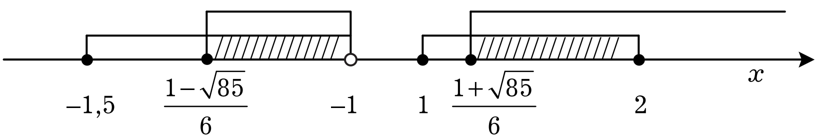

Рис. 6

Видно (рис. 6), что $x\in\left[\frac{1-\sqrt{85}}{6};-1\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{85}}{6};2\right]$.

Ответ. $\left[\frac{1-\sqrt{85}}{6};-1\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{85}}{6};2\right]$. ◄

Пример 16. Решите неравенство $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^5-x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}}-x\right)\left(\sqrt[4]{8x^2-6x+2}-1\right)}{(5x-1)(2x+1)}\geq 0.$

►Для первой скобки воспользуемся правилом ПК1, а для второй – правилом ПК2.

Тогда $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^5-x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}}-x\right)\left(\sqrt[4]{8x^2-6x+2}-1\right)}{(5x-1)(2x+1)}\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^5-x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}-x^5\right)\left(8x^2-6x+1\right)}{(5x-1)(2x+1)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\le 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Ответ. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. ◄

Литература

1. *Колесникова С.И.* Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 6-изд. гриф ФИПИ.

2. *Колесникова С.И.* Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис - пресс», 2008, 4-е изд.

3. *Колесникова С.И.* Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, ВАКО. 2011.

4. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Нестандартные задачи и современные методы решения. Москва, ООО «Азбука».

Новости Новости Новости Новости

В МГУ запатентовали уникальный вычислительный модуль для междисциплинарных исследований

Сотрудники факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ получили патент на способ формирования вычислительного комплекса, который позволит объединять и использовать вычислительные ресурсы различных видов для проведения междисциплинарных исследований, например, в области биоинформатики, биоинженерии, космических исследований, в медицине, физике и других областях науки.

Сегодня во многих высокотехнологичных областях науки и техники используют модульные вычислительные системы, состоящие из отдельных серверов, вычислительные ресурсы которых объединены в единое целое посредством специального программного обеспечения. Это могут быть персональные компьютеры, рабочие станции, серверы, мэйнфреймы, кластеры, представляющие собой распределённые системы компьютеров, суперкомпьютеры или облачные IT-ресурсы. Благодаря разработанным диспетчерским системам пакетной обработки данных, любая задача может быть распределена на все узлы объединения, в результате чего для решения каждой задачи могут быть использованы ресурсы всей системы.

Продолжение статьи: https://www.msu.ru/science/main_themes