**Ажгалиев Урынбасар**
Кандидат педагогических наук

**Дыбыспаев Болатжан**
Кандидат педагогических наук,
учитель математики школы-лицея № 28
г. Нур-Султан, Казахстан

# О систематизации задач на суммирование

Для повышения эффективности обучения решению олимпиадных задач желательно эти задачи как то систематизировать по методам решения осуществляя плавный переход от простого к сложному. Блоки задач могут конструироваться следующими способами, следуя Дорофееву Г.В. [3]:

а) приемы, используемые в ранее рассмотренных задач применяются в решении последующей;

б) результаты решения предыдущей задачи используются в условии последующей;

в) предыдущие задачи являются элементами последующей;

г) решения совокупности задач осуществляются одним и тем же методом.

Для иллюстрации сказанного приведем цепочку из 10 задач и разобьем их на три блока по нарастающей степени сложности. В первом блоке (задачи 1–4) мы предлагаем подготовительные задачи с решениями.

**Задача 1**

Найти сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Учитывая, что у всех дробей числитель равен 1, а в знаменателе произведение двух последовательных натуральных чисел можно применить соотношение

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(*)$$

Тогда вся наша сумма приведется к виду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}.$$

Легко видеть, что сумма равна

$$1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

Основной дидактической проблемой для учителя является подведение учащегося к самостоятельному нахождению приведенного соотношения.

**Задача 2**

Вычислить сумму:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{47\cdot 50}.$$

Основная идея решения остается прежней – применение соотношения (∗) в усовершенствованном виде

$$\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Тогда этот пример можно переписать в виде:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\right)=\frac{4}{25}.$$

Чтобы замаскировать идею решения, задачу 1 запишем в следующем виде.

**Задача 3**

Найти сумму:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Не делая прямой подсказки, путем наводящих вопросов, учитель может подвести учащихся к самостоятельному нахождению решения задачи.

**Задача 4**

Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1.$$

Левая часть неравенства легко приводится к виду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

что тривиально меньше 1.

Решив несколько серий таких примеров, учащиеся замечают общий принцип вычислений таких сумм: общий член представляется в виде алгебраической суммы двух или нескольких слагаемых.

Специально подобранные задачи второго блока (задачи 5–6) служат для закрепления алгоритма, примененного к задачам первого блока.

**Задача 5**

Решить уравнение:

$$\frac{1}{(n+2012)\cdot(n+2013)}+$$

$$+\frac{1}{(n+2013)\cdot(n+2014)}+$$

$$+\frac{1}{(n+2014)\cdot(n+2015)}+$$

$$+\frac{1}{(n+2015)\cdot(n+2016)}=\frac{4}{999999}.$$

После тщательного анализа учащиеся замечают, что знаменатель дроби каждого слагаемого представляет произведение двух последовательных чисел и, следовательно, можно применить указанный алгоритм. С учетом сказанного, уравнение приводим в виду

$$\frac{4}{(n+2012)\cdot(n+2016)}=\frac{1}{999999}.$$

Путем замены $n + 2012 = m$ получаем квадратное уравнение. Ответ

$$n_1=-14,\; n_2=-4014.$$

**Задача 6**

Вычислить сумму:

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+$$

$$+\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}.$$

Мозговая атака, после некоторого количества тупиковых идей может привести к следующей формуле:

$$\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=$$

$$=\frac{n}{(n-2)!\cdot(1+n-1+(n-1)\cdot n)}=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!n}=\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}.$$

Опираясь на последнее соотношение данную сумму напишем в виде

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots+$$

$$=\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!}.$$

Теперь очевидно, что искомая сумма равна

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{2018!}.$$

К третьему блоку (задачи 7–10) мы подобрали олимпиадные задачи, при решении которых используются алгоритмы первого и второго блоков.

**Задача 7**

Докажите, что

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1,\ N\in N,\ n\geq 2.$$

Основная трудность состоит в обнаружении неравенства

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\cdot(n-1)}.$$

После нахождения этого неравенства доказательство становится совершенно очевидным.

**Задача 8**

Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

Преобразуем выражение для общего вида:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)n}\right)=$$

$$=\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Теперь применяя наш алгоритм имеем:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<$$

$$<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<$$

$$<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

**Задача 9**

Вычислить:

$$\frac{2\cdot 2015}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+2015}}.$$

Приведем полное решение задачи. Первое, что приходит в голову –

это просуммировать суммы, стоящие в знаменателе. Имеем:

$$\frac{2\cdot 2015}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{2015\cdot 2016}{2}}}.$$

Далее, после некоторых размышлений можно догадаться разделить числитель и знаменатель на 2. Тогда выражение имеет вид:

$$\frac{2015}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}}.$$

Теперь замечаем, что знаменатель выражения становится похожим на выражение задачи 3. Преобразуем его:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}.$$

**Задача 10**

Вычислить

$$\frac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (существуют и другие способы решения). Сначала найдем сумму

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1).$$

Так как общий член нашей суммы представляется в виде $n^2+n$, то мы можем дважды применить Теорему 1 из (1). Следовательно,

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n+d.$$

Придавая $n$ значения 1, 2, 3, 4 приходим к системе линейных уравнений.

$$\begin{cases} a+b+c+d=2, \\ 8\cdot a+4\cdot b+2\cdot c+d=8, \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c+d=20, \\ 64\cdot a+16\cdot b+4\cdot c+d=40. \end{cases}$$

Решив систему, находим:

$$a=\frac{1}{3},\ b=1,\ c=\frac{2}{3},\ d=0.$$

Значит

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{2\cdot n}{3}=\frac{n^3+3\cdot n^2+2\cdot n}{3}.$$

Значит, искомая сумма равна

$$\frac{3}{n^3+3\cdot n^2+2\cdot n}.$$

Легко можно проверить, что сумма вычислена правильно. Для закрепления рассмотренных алгоритмов мы предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

**1.** Вычислить сумму:

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}.$$

Ответ: $1-\frac{1}{n!}$.

Указание: $\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{n-1!}-\frac{1}{n!}$.

**2.** Вычислить:

$$\frac{2}{1^4+1^2+1}+\frac{4}{2^4+2^2+1}+\frac{6}{3^4+3^2+1}+\ldots+$$

$$+\frac{3636}{2018^4+2018^2+1}.$$

Ответ: $\frac{4074342}{4074343}$.

Указание:

$$\frac{2\cdot n}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{n^4-n^2+1}-\frac{1}{n^4}.$$

**3.** Вычислить:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$.

Указание

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right).$$

**4.** Вычислить:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}\right)$.

Указание

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right].$$

**5.** Доказать неравенство

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\frac{1}{(2\cdot n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Указание: использовать соотношение

$$\frac{1}{(2\cdot n+1)^2}<\frac{1}{2\cdot n\cdot(2\cdot n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

**6.** Решить уравнение

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}.$$

Ответ: $n=4$.

Подведем некоторые итоги. Рассмотренную нами систематизацию задач можно тематически использовать для задач других групп. Применение такого подхода позволило бы повысить эффективность подготовки учащихся к математическим олимпиадам.

**Использованная литература**

1. Абрамович В.С. «Суммы одинаковых степеней натуральных чисел» // Журнал Квант, №5, 1973 год.

2. Балаян Э.Н. «555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 класс» // Ростов-на-Дону «Феникс» 2009 год.

3. Балаян Э.Н. «1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике». 3-е изд. – Ростов-на-Дону // Феникс, 2008 год.

4. Дорофеев Г.В. «О составлении циклов взаимосвязанных задач» // Математика в школе. 1983 – №6.

5. Задачи III этапа Казахстанской олимпиады по математике 2018 года.

6. Зубелевич Г.И. «Сборник задач московских олимпиад». Издательство Просвещение Москва. 1967 год.