МАТЕМАТИКА

Софья Ильинична Колесникова
Старший преподаватель кафедры высшей математики
Московского физико-технического института (МФТИ),
специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал»,
автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ»
и «Решение сложных задач ЕГЭ»,
лауреат премии Правительства РФ 2020 года
в области образования

Просто интересные задачи

Задачи этой заметки взяты из учебников с углублённым изучением математики и сборников тренировочных вариантов под редакцией И.В. Ященко 2022 г.

В рассмотренных автором учебниках введено понятие (ОДЗ) и то или иное определение понятия равносильности уравнений (неравенств), но дальше определения, как правило, чаще всего дело не идёт. В решении задач по-прежнему вычисления, равносильные или не равносильные, отделяются друг от друга точкой с запятой (что она означает, не совсем понятно), значок равносильности $\Leftrightarrow$ не используется, но слова о равносильности иногда пишутся, а об области допустимых значений вспоминается в самом конце (аббревиатура ОДЗ не употребляется ни в начале решения, ни в конце).

Известно также, что некоторые учителя даже в спецклассах не используют равносильность переходов и не советуют это делать своим ученикам, объясняя это тем, что так легко запутаться, а другие апеллируют к тому, что эксперты ЕГЭ этого не понимают.

Задачи статьи, решённые в других источниках по-другому, оформлены с равносильными переходами, а некоторые используют графики элементарных функций.

Статья прежде всего адресована учащимся 10-11 классов именно сейчас, чтобы у них было время в течение будущего учебного года постараться понять, как равносильность преобразований упрощает решение многих неравенств. Она может оказаться также полезной сомневающимся и молодым учителям.

Задачи с модулем

Равносильное соотношение

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \quad \text{(ПМ 1)}$$

верно при любых $f(x)$, $g(x)$, независимо от их знаков.

►Покажем это.

Пусть $|f(x)| < g(x)$.

Тогда

$$|f(x)| \le g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \Rightarrow \varnothing, \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ \varnothing \end{cases} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$$

Пусть теперь, наоборот, $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$

Тогда

$$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -g(x) \le g(x) \Leftrightarrow g(x) \ge 0, \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \end{cases} \Leftrightarrow |f(x)| \le g(x). \blacktriangleleft$$

Пример 1. Решите неравенство

$$|x^2 - 3x + 2| < 2x - x^2.$$

► Воспользуемся ПМ 1:

$$|x^2 - 3x + 2| < 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2, \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right), \\ 2 > x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.◄

Равносильное соотношение

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array} \right. \quad \text{(ПМ 2)}$$

верно при любых $f(x)$, $g(x)$, независимо от их знаков.

►Покажем это.

Пусть $|f(x)| \ge g(x)$.

Тогда $|f(x)| \ge g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \Rightarrow x \in R, \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in R \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array} \right.$

Пусть теперь, наоборот,

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array} \right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow |f(x)| \geq g(x)$. ◄

Пример 2. Решите неравенство

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| > 2x - x^2.$$

►Воспользуемся ПМ 2:

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| > 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 > 2x - x^2, \\ x^2 - 3x + 2 < x^2 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty), \\ x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty).$$

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. ◄

Правила ПМ 1 и ПМ2 можно использовать и при решении неравенств, содержащих несколько модулей.

Пример 3. Решите неравенство

$$\left|x^2 - 4\right| + |x + 1| - 3 > 0.$$

►Воспользуемся последовательно два раза ПМ2:

$$\left|x^2 - 4\right| + |x + 1| - 3 > 0 \Leftrightarrow \left|x^2 - 4\right| > 3 - |x + 1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 > 3 - |x + 1|, \\ x^2 - 4 < |x + 1| - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x + 1| > 7 - x^2, \\ |x + 1| > x^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 7 - x^2, \\ x + 1 < x^2 - 7, \\ x + 1 > x^2 - 1, \\ x + 1 < 1 - x^2. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-6>0, \\ x^2-x-8>0, \\ x^2-x-2<0, \\ x^2+x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup (-1;2) \cup (2;+\infty).$$

Ответ. $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup (-1;2) \cup (2;+\infty)$ ◄

Пример 4. Решите неравенство

$$|x-2|+|x+4| \le 10.$$

► Воспользуемся последовательно два раза ПМ1:

$$|x-2|+|x+4| \le 10 \Leftrightarrow |x-2| \le 10-|x+4| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \le 10-|x+4|, \\ x-2 \ge |x+4|-10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+4| \le 12-x, \\ |x+4| \le x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \le 12-x, \\ x+4 \ge x-12, \\ x+4 \le x+8, \\ x+4 \ge -x-8. \end{cases} \Leftrightarrow -6 \le x \le 4$$

Ответ. $[-6;4]$. ◄

Монотонные функции

Строго моиотонная функция если принимает какое-то значение, то только в одной точке.

Пример 5. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5.$$

► ***Первый способ***

Видно, что слева в уравнении стоит сумма монотонно возрастающих в области определения функций – рис. 1, причём, при $x = 2$ сумма равна 5. Значит, это и есть решение уравнения

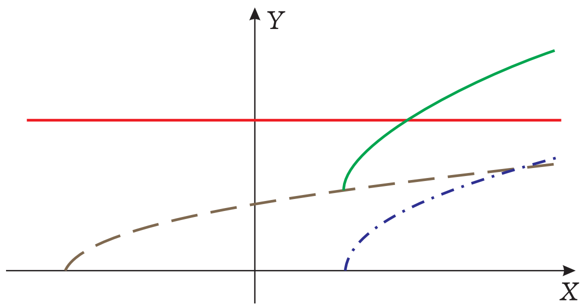

Рис. 1

$$y_1 = \sqrt{2x+5},\quad y_2 = \sqrt{5x-6},\quad y_3 = \sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6}$$

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5 \Leftrightarrow x = 2\,.$$

Ответ. $\{2\}$.

Второй способ

Можно задачу решить по-другому. Перепишем уравнение

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = 5 - \sqrt{5x-6}$$

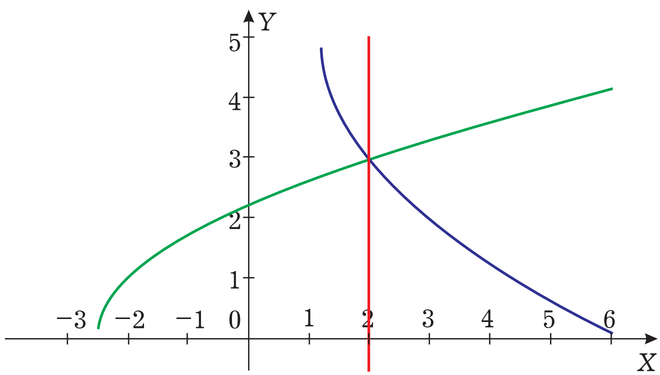

Рис. 2

$$y_1 = \sqrt{2x+5},\ y_4 = 5 - \sqrt{5x-6}.$$

Слева функция монотонно возрастающая, а справа монотонно убывающая: если они пересекаются, то только в одной точке. Видно, что это $x = 2$.

Ответ. $\{2\}$.◀

Пример 6. Решите уравнение

$$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x).$$

►Слева функция монотонно возрастает, а справа монотонно убывает. Угадывается точка пересечения. $\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)\Leftrightarrow x=-1$.

Ответ. $\{-1\}$.◄

Роль ОДЗ

Пример 7. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

►Запишем ОДЗ: $x>8$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}-3>0,\\ 2^{x^2+6x+5}-1>0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0\Leftrightarrow\ln(x-8)=0\Leftrightarrow x=9.$$

Ответ. {9}.◄

Пример 8. $\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{3}}=x$.

► Слева стоит выражение в рациональной степени. Поэтому, по определению,

$$\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{3}}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+2x=x^3\Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2,\end{array}\right.\quad\text{или}$$

$$\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{3}}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x\ge 0,\\ x^2+2x=x^3\Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ. $\{0;\,2\}$. ◄

Логарифм с переменным основанием

Пример 9. Решите уравнение

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x).$$

► По определению,

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x)\Leftrightarrow$$
$$\frac{\lg\left(x^2-1\right)}{\lg(x+4)}=\frac{\lg(5-x)}{\lg(x+4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=5-x,\\ x+4\neq 1,\\ x+4>0,\\ 5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<5,\\ x\neq -3,\\ x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm 5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ $\{2\}$.

Замечание. Видно, что уравнение $x^2-1=5-x$ не является результатом потенцирования исходного уравнения. Оно появилось после использования определения логарифма с переменным основанием, свойства равенства дробей с одинаковым знаменателем, и только после этого использовано потенцирование уравнения, содержащего логарифмы с постоянным основанием.

Метод рационализации

Знак разности $\log_{a(x)}f(x)-\log_{a(x)}g(x)$ *совпадает со знаком произведения* $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$, *и разность и произведение обращаются в 0 одновременно в ОДЗ*, или, в современных обозначениях,

$$\text{\textit{П Л3.}}\quad \log_{a(x)}f(x)-\log_{a(x)}g(x)\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\left(a(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)\vee 0$$

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x).$$

► Найдём ОДЗ: $\begin{cases}x-2>0\Rightarrow 2x-3>0,\\ x-2\neq 1,\\ 24-6x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(2;3)\cup(3;4).$

Первый способ (метод рационализации для логарифмов с переменным основанием)

Решим неравенство так называемым «методом рационализации»:

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (x-2-1)(2x-3-24+6x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(8x-27) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;3) \cup \left(\frac{27}{8};+\infty\right)$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x \in (2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right)$.

Ответ. $(2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right)$.

Второй способ (для тех, кто не знает метод рационализации для логарифмов с переменным основанием)

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 > 1, \\ 2x-3 > 24-6x; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ 2x-3 < 24-6x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3, \\ x > \dfrac{27}{8}; \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x < \dfrac{27}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (2;3) \cup \left(\frac{27}{8};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x \in (2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right)$.

Ответ. $(2;3) \cup \left(\frac{27}{8};4\right)$. ◄

Правила для показательных функций
и логарифмов с постоянным основанием

П П1. $a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0$

П П2. $a^{f(x)} - 1 \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)f(x) \vee 0$

П Л1. $\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0$

П Л2. $\log_a f(x) \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-1\big) \vee 0$

Пример 11. Решите неравенство

$$\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)\le 96.$$

►Упростим левую часть, воспользовавшись дважды «квадратным трёхчленом», а затем применим соответствующий метод рационализации для показательной функции:

$$\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)-96\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(2^{2x}-5\cdot 2^x\right)-24\right)\left(\left(2^{2x}-5\cdot 2^x\right)+4\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x-8\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x-1\right)\left(2^x-4\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-3)(x-0)(x-2)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3].$$

Ответ. $(-\infty;0]\cup[2;3]$. ◄

Пример 12. Решите неравенство

$$\left(2\cdot 0.5^{x+2}-0.5\cdot 2^{x+2}\right)\left(2\log_{0,5}^2(x+2)-0.5\log_2(x+2)\right)\le 0.$$

► Найдём ОДЗ: $x>-2$.
Воспользуемся ПП 1 и ПЛ1:

$$\left(2\cdot 0.5^{x+2}-0.5\cdot 2^{x+2}\right)\left(2\log_{0,5}^2(x+2)-0.5\log_2(x+2)\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4-2^{2x+4}\right)}{2^{x+2}}\left(4\log_2^2(x+2)-\log_2(x+2)\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{2x+4}-2^2\right)\log_2(x+2)\left(\log_2(x+2)^4-\log_2 2\right)\ge 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow(2x+4-2)(x+2-1)\left((x+2)^4-2\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2\left((x+2)-\sqrt[4]{2}\right)\left((x+2)+\sqrt[4]{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2-\sqrt[4]{2}\right]\cup\{-1\}\cup\left[-2+\sqrt[4]{2};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ: $x\in\{-1\}\cup\left[-2+\sqrt[4]{2};+\infty\right)$.

Ответ. $\{-1\}\cup\left[-2+\sqrt[4]{2};+\infty\right)$. ◄

Внимательно разлагаем квадратный трёхчлен на линейные множители

Пример 13. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(12-6x) \ge \log_{0,5}\left(x^2-6x+8\right)+\log_{0,5}(x+3).$$

► Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 12-6x>0, \\ x^2-6x+8=(x-4)(x-2)>0, \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;2), \\ x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3;2).$$

Так как

$\log_{0,5}(12-6x)=-\log_2 6(2-x)$, а $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)=(2-x)(4-x)$, то

$$\log_{0,5}(12-6x) \ge \log_{0,5}\left(x^2-6x+8\right)+\log_{0,5}(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 6(2-x) \le \log_2(2-x)+\log_2(4-x)+\log_2(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \log_2 6 \le \log_2(4-x)(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(4-x)-6 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6 \le 0 \Leftrightarrow x\in[-2;\ 3] \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x\in[-2;\ 2).$$

Ответ. $[-2;2)$. ◄

Пример 14. Решите неравенство

$$x^2\log_{64}(3-2x) \ge \log_2\left(4x^2-12x+9\right).$$

► Упростим неравенство и воспользуемся ПЛ 2:

$$x^2\log_{64}(3-2x) \ge \log_2\left(4x^2-12x+9\right)=\log_2(3-2x)^2=2\log_2(3-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\log_2(3-2x) \ge 12\log_2(3-2x) \Leftrightarrow \left(x^2-12\right)\log_2(3-2x) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x>0, \\ \left(x^2-12\right)(3-2x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ \left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)(x-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup[1;\ 1{,}5).$$

Ответ. $\left(-\infty;\ -2\sqrt{3}\right]\cup[1;\ 1{,}5)$. ◄

Метод интервалов, обобщённый метод интервалов и методы рационализации

Пример 15. Решите неравенство

$$4^{\frac{2x+2}{x}}-\frac{4}{3}12^{\frac{x+1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\geq 0.$$

►Разложим левую часть на множители и применим ПП 1 и ПП 2:

$$4^{\frac{2x+2}{x}}-\frac{4}{3}12^{\frac{x+1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^2 4^{\frac{2}{x}}-4^2 4^{\frac{1}{x}}3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\geq 0\Leftrightarrow\left(4^{2+\frac{1}{x}}-1\right)\left(4^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4^{\frac{2x+1}{x}}-4^0\right)\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{4}{3}\right)^0\right)\geq 0\Leftrightarrow(4-1)\left(\frac{2x+1}{x}-0\right)\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{1}{x}-0\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup(0;\ +\infty).$$

Ответ. $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty).$

Замечания.

1. При применении обобщённого метода интервалов некоторые отбрасывали второй множитель, т. к. он не обращается в 0 и кажется положительным из-за того, что $4 > 3$.

2. Если поступить верно и не отбрасывать второй множитель, то обязательно надо рассмотреть знаки в промежутках с помощью пробных точек. ◄

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{x+3}-3\right)\left(\left|x^2-1\right|-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{3x^2-2x+1}}\geq 0.$$

►Найдём ОДЗ: $x\geq -1$.

Функция $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{x+3}$ монотонно возрастает в ОДЗ и $f(1) = 3$.

Поэтому, в силу метода рационализации для монотонных функций, имеем

$$f(x)-f(1)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (x-1)\vee 0.$$

Остальные две скобки в левой части неравенства умножим на положительные сопряжённые выражения:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{x+3}-3\right)\left(\left|x^2-1\right|-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{3x^2-2x+1}}\geq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \frac{(x-1)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{3}{2}\right)}{-2x^2+x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(x-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\cup\left[-\sqrt{\frac{1}{2}};0\right)\cup\left[\frac{1}{2};\sqrt{\frac{1}{2}}\right]\cup\left[1;\sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Учтём ОДЗ: $x\in\left[-\sqrt{\frac{1}{2}};0\right)\cup\left[\frac{1}{2};\sqrt{\frac{1}{2}}\right]\cup\left[1;\sqrt{\frac{3}{2}}\right].$

Ответ. $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}};0\right)\cup\left[\frac{1}{2};\sqrt{\frac{1}{2}}\right]\cup\left[1;\sqrt{\frac{3}{2}}\right].$

Примечание. Сравните с решением с помощью обобщённого метода интервалов. ◄

Задачи с параметром

Пример 17. Решите уравнение

$$\sqrt{x-a}=2a-x.$$

► Воспользуемся стандартным способом решения уравнения вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x).\end{cases}$$

Поэтому

$$\sqrt{x-a}=2a-x\Leftrightarrow\begin{cases}2a-x\ge 0,\\ x-a=4a^2-4ax+x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-x\ge 0,\\ x^2-x(4a+1)+4a^2+a=0\Leftrightarrow x=2a+\dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a+\dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2},\\ 2a+\dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}\le 2a\Rightarrow\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\le 0\Leftrightarrow\sqrt{4a+1}\ge 1\Leftrightarrow a\ge 0.\end{cases}$$

Ответ. $a\ge 0: x=2a+\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$,

$a<0:\varnothing$. ◄

Пример 18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-3x}=a-5|x|$$

имеет ровно два различных решения.

► Построим эскизы кривых: $y=\sqrt{1-3x}$ и $y=a-5|x|$ – рис. 3.

Заметим, что $\sqrt{1-3x}=a-5|x|\ge 0\Rightarrow a\ge 0$.

Видно, что при $x<0$ пересечение всегда существует при $a>1$, и оно одно.

Найдём, a, при котором прямая $y=a-5x$ проходит через точку $\left(\dfrac{1}{3};0\right)$:

$0=a-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$. Видно, что, если $1<a<\dfrac{5}{3}$, то при $x>0$ пересечение одно. Одно пересечение и тогда, когда прямая касается полупараболы:

$$x\ge 0:\sqrt{1-3x}=a-5x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ a-5x\ge 0,\\ 1-3x=a^2-10ax+25x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\dfrac{a}{5},\\ 25x^2-x(10a-3)+a^2-1=0\Rightarrow D=109-60a.\end{cases}$$

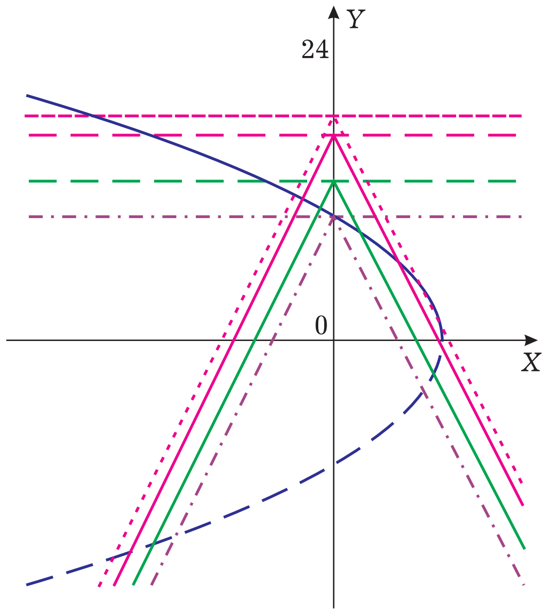

Рис. 3

Тогда дискриминант равен 0:

$$109 - 60a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{109}{60}.$$

Теперь ясно, что решений ровно 2, если (рис. 3) $a \in \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left\{\frac{109}{60}\right\}.$

Ответ. $\left(1;\ \frac{5}{3}\right) \cup \left\{\frac{109}{60}\right\}.$ ◄

Примечание. Аналитическое решение громоздко, но существует.

Пример 19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

► Рассмотрим в плоскости (x, a) ломаную

$$a = |3x| - 2x - 2 = \left[\begin{array}{l} x - 2, x \ge 0, \\ -5x - 2, x \le 0 \end{array}\right.$$

и параболу $a = (x - 2)x$ − рис. 4.

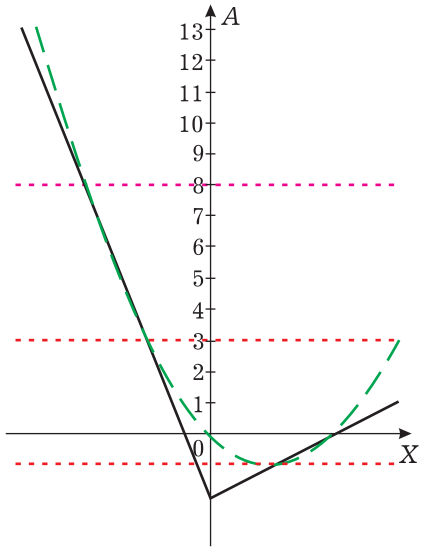

Рис. 4

Найдём точки пересечения:

$$x^2 - 2x = x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a = -1, a = 0$$

$$x^2 - 2x = -5x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow a = 8, a = 3.$$

Видно, что решений ровно 2, если $a \in (-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3) \cup (3;8) \cup (8;+\infty)$.

Ответ. $(-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3) \cup (3;8) \cup (8;+\infty)$. ◄

Пример 20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + x + a}{x^2 - 2x + a^2 + 6a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

► Построим в плоскости (x, a) эскизы кривых:

парабола $x^2 + x + a = 0 \Leftrightarrow a = -x(x+1)$ и

окружность $x^2 - 2x + a^2 + 6a = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (a+3)^2 = 10$ – рис. 5.

Найдём значения a, при которых кривые пересекаются:

$$\begin{cases} x^2 + x + a = 0, \\ x^2 - 2x + a^2 + 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + a = 0, \\ -3x + a^2 + 5a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a^2+5a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a^2+5a}{3}\right)+a=0 \Leftrightarrow a(a+2)^2(a+6)=0, \\ -3x+a^2+5a=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Это $a=0, a=6,$ а при $a=-2$ кривые касаются.

Видно, что два решения, если $a\in(-\infty;-6)\cup(-6;-2)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right).$

Ответ. $(-\infty;-6)\cup(-6;-2)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right).$ ◄

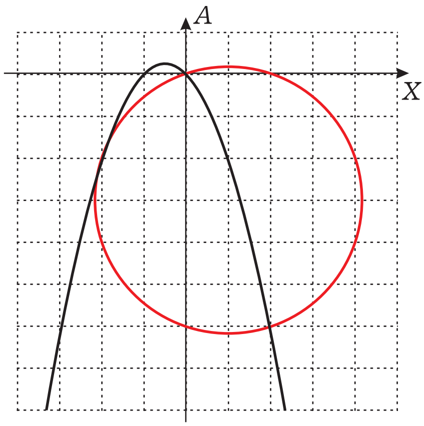

Рис. 5

Пример 21. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7\left(36-y^2\right)=\log_7\left(36-a^2x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

► ***Первый способ*** (графический)

Перепишем систему по-другому:

$$\begin{cases} \log_7\left(36-y^2\right)=\log_7\left(36-a^2x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=a^2x^2<36, \\ (x-1)^2+(y-3)^3=10. \end{cases}$$

Рассмотрим, для определённости, $a \geq 0$.

Построим эскизы графиков прямых $y = \pm ax$ при некоторых значениях а и окружность $(x-1)^2 + (y-3)^3 = 10$ – рис. 6.

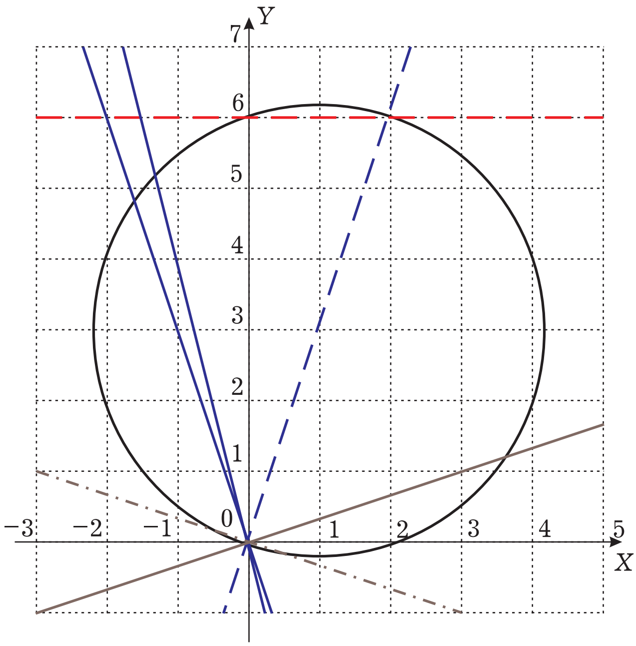

Рис.6

Видно, что два решения при $a = 0, a = \frac{1}{3}$, $a \in (-\infty; -3)$ для $y = ax$ и $a \geq 0$.

Так как в систему a входит в квадрате, то тоже решение получится и при $a \leq 0$. Поэтому

Ответ. $a = 0, a = \frac{1}{3}$, $a \in (-\infty; -3)$ и $a = -\frac{1}{3}$, $a \in (3; +\infty)$.

Второй способ (аналитический)

Решим сначала систему при всех a:

$$\begin{cases} \log_7\left(36 - y^2\right) = \log_7\left(36 - a^2x^2\right), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm ax, \\ y^2 < 36, \\ x^2 + a^2x^2 = 2x \pm 6ax \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0, y_0 = 0, a - \text{любое}, \\ \left\{\begin{array}{l} y = \pm ax, \\ x = \dfrac{2(1 \pm 3a)}{1+a^2}, \\ a^2x^2 = a^2 \dfrac{4(1 \pm 3a)^2}{\left(1+a^2\right)^2} < 36. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Теперь решаем систему

$$\left\{\begin{array}{l} y = \pm ax, \\ x = \dfrac{2(1 \pm 3a)}{1+a^2}, \\ a^2x^2 = a^2 \dfrac{4(1 \pm 3a)^2}{\left(1+a^2\right)^2} < 36. \end{array}\right.$$

1) Рассмотрим сначала $a = 0$: $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0, \\ x_1 = 2. \end{array}\right.$

2) Рассмотрим теперь $y = ax$, т. е. систему

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 = ax, \\ x_2 = \dfrac{2(1+3a)}{1+a^2}, \\ a^2x^2 = a^2 \dfrac{4(1+3a)^2}{\left(1+a^2\right)^2} < 36 \Leftrightarrow (a-3)\left(6a^2+a+3\right) < 0 \Leftrightarrow a < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{2(1+3a)}{1+a^2}, \\ y_2=\dfrac{2(1+3a)a}{1+a^2}, \\ a<3. \end{cases}\Rightarrow(x_2,y_2)=(x_0,y_0), a=-\frac{1}{3}$$

Теперь пусть $y=-ax$:

$$\begin{cases} y_3=-ax, \\ x_3=\dfrac{2(1-3a)}{1+a^2}, \\ a^2x^2=a^2\dfrac{4(1-3a)^2}{\left(1+a^2\right)^2}<36\Leftrightarrow(a+3)\left(6a^2-a+3\right)>0\Leftrightarrow a>-3 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y_3=-\dfrac{2(1-3a)a}{1+a^2}, \\ x_3=\dfrac{2(1-3a)}{1+a^2}, \\ a>-3 \end{cases}\Rightarrow(x_3,y_3)=(x_0,y_0), a=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y^2=a^2x^2<36, a>0 \\ y=-ax\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=0, a>0 \\ x_2=\dfrac{2(1-3a)}{1+a^2}\Rightarrow x_0=x_2 \text{ при } a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}\Rightarrow$$

Ответ. $a=0, a=\frac{1}{3}, a\in(-\infty;-3)$ и $a=-\frac{1}{3}, a\in(3;+\infty)$. ◄

Литература

1. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс»,2008, 6-изд. Учебное пособие, допущено ФИПИ.
2. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 4-е изд.
3. Колесникова С.И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, «ВАКО», 2011.
4. Колесникова С.И. «Методы рационализации». Потенциал, 2021 г., №№3–7.