

Вокруг вписанной и невписанной окружностей треугольника

Рассмотрим задачи, связанные с вписанной и с невписанными окружностями треугольника.

Невписанной окружностью треугольника называют окружность, касающуюся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

1. Длины сторон BC , AC и AB треугольника ABC равны соответственно a , b и c . Определите, на какие отрезки сторону BC треугольника ABC делит точка касания: 1) вписанной окружности; 2) невписанной окружности.

Пусть стороны BC касаются окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , и невписанная окружность с центром X . Точки E и K , D и M , F и N – точки касания вписанной и невписанной окружностей с лучами AB , AC со стороной BC соответственно (рис. 1).

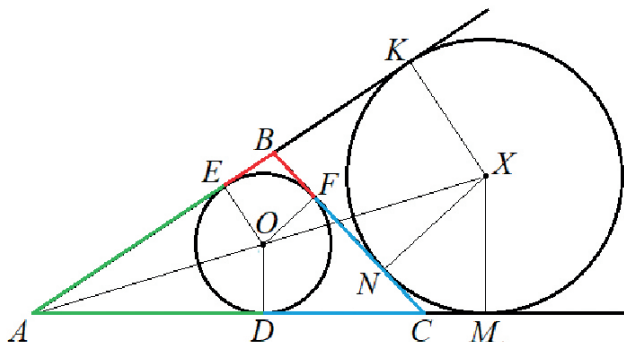


Рис. 1

1) По свойству касательных, проведённых из точки к окружности, $AE = AD$, $BE = BF$, $CF = CD$.

Обозначим $AE = AD = d$, тогда $BE = BF = c - d$, $CF = CD = b - d$ и верно равенство $a = c - d + b - d$, откуда следует, что $d = \frac{b+c-a}{2} = p - a$, где p – полупериметр треугольника ABC ; $BF = c - d = p - b$, $CF = b - d = p - c$.

Итак, точка F касания вписанной окружности и стороны BC треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BF = p - b$ и $CF = p - c$.

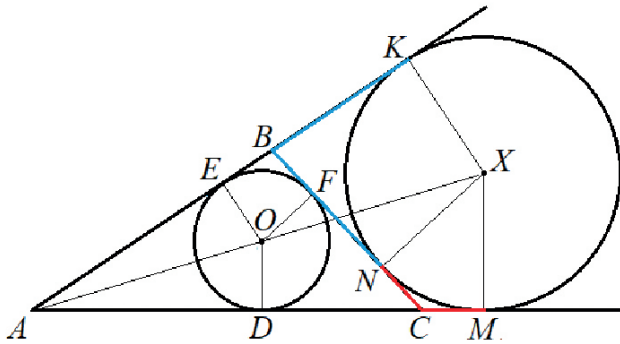


Рис. 2

2) По свойству касательных, проведённых из точки к окружности, $AM = AK$, $BN = BK$, $CN = CM$. Так как периметр треугольника ABC равен $AB + BN + NC + AC = AB + BK + CM + AC = AK + AM$, а $AK = AM$, то $AK = AM = p$, тогда $CN = CM = p - b$, $BN = BK = p - c$.

Итак, точка N касания вневписанной окружности и стороны BC треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $CN = p - b$, $BN = p - c$.

2. Выразите через a , b и c радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

Так как площадь S треугольника ABC равна $S = pr$, а по формуле Герона она равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

то

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Воспользуемся обозначениями, принятыми в задаче 1. Центр и радиус вневписанной окружности, вписанной в угол B , обозначим Y и y , а центр и радиус вневписанной окружности, вписанной в угол C , обозначим Z и z (против вершин A, B, C лежат центры вневписанных окружностей X, Y, Z).

Так как треугольники AOD и AXM подобны по двум углам, то верно равенство

$$\frac{XM}{OD} = \frac{AM}{AD}, \text{ т. е. } \frac{x}{r} = \frac{p}{p-a},$$

откуда получаем, что

$$x = \frac{pr}{p-a} = \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Аналогично получим:

$$y = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}, \quad z = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

3. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Так как $\frac{1}{x} = \frac{p-a}{pr}$, $\frac{1}{y} = \frac{p-b}{pr}$, $\frac{1}{z} = \frac{p-c}{pr}$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{p-a}{pr} + \frac{p-b}{pr} + \frac{p-c}{pr} = \frac{3p-2p}{pr} = \frac{1}{r},$$

что и требовалось доказать.

4. Выразите через радиусы x , y и z вневписанных окружностей периметр и площадь треугольника ABC .

Из результата задачи 3 следует, что $r = \frac{xyz}{xy + yz + xz}$. Заменяя в этом равен-

стве r на $\frac{S}{p}$, получим:

$$\frac{S}{p} = \frac{xyz}{xy + yz + xz}. \quad (1)$$

Перемножив равенства $r = \frac{S}{p}$, $x = \frac{S}{p-a}$, $y = \frac{S}{p-b}$, $z = \frac{S}{p-c}$, получим, что

$$rxyz = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2,$$

т. е. $S^2 = rxyz = \frac{Sxyz}{p}$, откуда следует, что

$$S = \frac{xyz}{p}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $p = \sqrt{xy + yz + xz}$.

Из равенства (1) получим:

$$S = \frac{pxyz}{xy + yz + xz} = \frac{xyz\sqrt{xy + yz + xz}}{xy + yz + xz} = \frac{xyz}{\sqrt{xy + yz + xz}}.$$

5. Выразите через радиусы x , y и z вневписанных окружностей треугольника ABC стороны a , b и c этого треугольника.

Из равенства $x = \frac{S}{p-a}$ выразим a :

$$a = p - \frac{S}{x} = \sqrt{xy + yz + xz} - \frac{yz}{\sqrt{xy + yz + xz}} = \frac{x(y+z)}{\sqrt{xy + yz + xz}}.$$

Аналогично получим:

$$b = \frac{y(x+z)}{\sqrt{xy + yz + xz}} \text{ и } c = \frac{z(x+y)}{\sqrt{xy + yz + xz}}.$$

При работе с классом можно сначала решить задачи 6-10 с конкретными числовыми данными, а потом в общем виде. Обратный порядок использования задач может привести к бездумной подстановке числовых данных в готовые формулы и для обучения малополезен.

Задачи для самостоятельного решения

6. Длины сторон BC , AC и AB треугольника ABC равны соответственно 13, 14 и 15. Определите, на какие отрезки стороны треугольника ABC делят точки касания: 1) вписанной окружности; 2) вневписанных окружностей.

7. Длины сторон BC , AC и AB треугольника ABC равны соответственно 13, 14 и 15. Вычислите радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

8. Вычислите радиус вписанной, если вневписанные окружности имеют радиусы 3, 6, 12.

9. Радиусы вневписанных окружностей равны 24, 28 и 42. Вычислите периметр и площадь треугольника ABC .

10. Радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC равны 24, 28 и 42. Вычислите стороны этого треугольника.

Материал подготовил А.В. Шевкин

МУДРЫЕ МЫСЛИ

Если что-то кажется тебе слишком трудным, не думай, что это за пределами сил человека. И наоборот, если какой-либо человек может совершить тот или иной достойный поступок, значит, такой же поступок в состоянии совершить и ты.

Прошлое не вернуть, но зато как его можно вывернуть!

Надо покорять умом то, что нельзя одолеть силой.

Марк Аврелий