Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ». Лауреат премии Правительства РФ 2020 г. в области образования.

Методы рационализации

Часть вторая. Некоторые типы неравенств, содержащих логарифмы с переменным основанием

1. Логарифм с переменным основанием. Определение.

Рассмотрим функцию $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$. Что это за функция? Каковы её свойства? В школе на эти вопросы ответа нет – автору не встретился учебник, в котором что-либо говорилось бы о такой функции.

Зато неоднократно встречалось утверждение, что $y(x)=\log_a f(x), a>0, a\neq 1$ является частным случаем $z(x)=\log_{a(x)} f(x), a(x)\neq const$. Так ли это в действительности?

Нет, не так – функция $z(x)=\log_{a(x)} f(x)$ не является логарифмической. Тогда что это такое?

По определению, полагают, что для любого допустимого основания $c>0, c\neq 1$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)=\frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}} \qquad (1)$$

т.е. $\log_{a(x)} f(x)$ – это *частное* двух логарифмов.

Отсюда естественным образом вытекает, что областью определения, или ОДЗ, функции $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$ является множество X, на котором

$$a(x)>0,\ a(x)\neq 1,\ f(x)>0.$$

Поэтому составители ЕГЭ при решении примера $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\left(\dfrac{x}{6}\right)} \geq -1$; $\begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)}{\lg\left(\dfrac{x}{6}\right)} \geq -1, \\ x \neq 2 \end{cases}$; должны были бы записать не «Перейдём к десятичным логарифмам», а «Запишем, по определению, взяв в качестве основания число 10». Тогда и учитель, и школьник подумали бы о том, что же такое логарифм с переменным основанием.

Теперь, имея определение логарифма с переменным основанием, можно найти, например, правило дифференцирования:

$$y'(x) = \left(\log_{a(x)} f(x)\right)' = \left(\frac{\ln f(x)}{\ln a(x)}\right)' = \frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \ln a(x) - \ln f(x) \cdot \dfrac{a'(x)}{a(x)}}{\ln^2 a(x)} =$$

$$= \frac{a(x) f'(x) \ln a(x) - f(x) a'(x) \ln f(x)}{f(x) a(x) \ln^2 a(x)}. \qquad (2)$$

Как видим, формула сложная и никак не похожа на производную логарифма. Её не надо запоминать – просто надо дифференцировать дробь

$$\frac{\ln f(x)}{\ln a(x)} = \log_{a(x)} f(x).$$

2. **Уравнения вида** $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

Рассмотрим уравнение вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

А теперь аккуратно выведем то уравнение, которое декларируется во всех методических пособиях.

► Воспользуемся *определением* логарифма с переменным основанием:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \lg f(x) = \lg g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x), \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x),} \qquad (3)$$

или можно записать и так:

$$\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)>0 \end{cases} \qquad (3^*) ◄$$

Общая рекомендация для решения уравнений, у которых есть ОДЗ – ОДЗ пишем, но сразу не находим.

Пример 1. Решите уравнение $\log_{x^2+1}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)=\log_{2x+4}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)$

► Запишем ОДЗ: $\begin{cases} x^2+1\neq 1, \\ 5-4^{x^2+3x-9}>0, \\ 2x+4>0, \\ 2x+4\neq 1 \end{cases}$

Воспользуемся определением логарифма с переменным основанием:

$$\log_{x^2+1}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)=\log_{2x+4}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right) \Leftrightarrow \frac{\lg\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)}{\lg\left(x^2+1\right)}=\frac{\lg\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)}{\lg(2x+4)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lg\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)\left(\lg(2x+4)-\lg\left(x^2+1\right)\right)}{\lg(2x+4)\lg\left(x^2+1\right)}=0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 5-4^{x^2+3x-9}=1, \\ 2x+4=x^2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-9=1, \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5\notin ОДЗ, \\ x=2\in ОДЗ, \\ x=3\notin ОДЗ, \\ x=-1\in ОДЗ \end{array}\right. \quad \textbf{Ответ. } \{-1;2\}.$$

Примечание. Так как использовались равносильные преобразования, то достаточно подставить корни (можно устно) в ОДЗ. Если равносильные преобразования не использовались, корни можно сначала подставить в ОДЗ, а оставшиеся в уравнение, или сразу в уравнение. ◄

3. Неравенства, содержащие логарифм с переменным основанием

а) Рассмотрим неравенство вида

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0, \qquad (4)$$

где $f(x)>0,\ g(x)>0,\ a(x)>0,\ a(x)\neq 1.$

По определению, для любого допустимого основания,

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0 \Leftrightarrow \frac{\log_c f(x)-\log_c g(x)}{\log_c a(x)}\vee 0. \qquad (5)$$

В силу правила (часть первая статьи)

$$\text{П Л1.} \quad \log_c f(x)-\log_c g(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (c-1)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

для логарифма с постоянным основанием, знак разности $\log_c f(x)-\log_c g(x)$ в числителе совпадает со знаком произведения $(c-1)\big(f(x)-g(x)\big)$, разность $\log_c f(x)-\log_c g(x)$ и произведение $(c-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ обращаются в 0 одновременно в ОДЗ

В силу правила

$$\text{П Л2.} \qquad \log_c a(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (c-1)\big(a(x)-1\big)\vee 0$$

для логарифма с постоянным основанием, знак $\log_c a(x)$ в знаменателе совпадает со знаком произведения $(c-1)\big(a(x)-1\big)$, $\log_c a(x)$ и произведение $(c-1)\big(a(x)-1\big)$ обращаются в 0 одновременно в ОДЗ $(c>0, c\neq 1\ f(x)>0, g(x)>0)$.

Поэтому знак дроби $\dfrac{\log_c f(x)-\log_c g(x)}{\log_c a(x)}$, а, значит, и *знак разности* $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$ *совпадает со знаком частного* $\dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}$ в ОДЗ, и мы получаем правило П Л3*:

$$\text{П Л3*.} \ \log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}\vee 0$$

Это правило удобно использовать при решении *нестрогого* неравенства, чтобы не решать отдельно неравенство $a(x)-1\neq 0$ (в ОДЗ*).

Но, так как $a(x)-1\neq 0$ в ОДЗ, то знак дроби $\dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

Отсюда следует правило П Л3:

Знак разности $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$ *совпадает со знаком произведения* $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$, *и разность и произведение обращаются в 0 одновременно в ОДЗ*, или, в современных обозначениях,

$$\text{П Л3.} \quad \log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0,$$

или

$$\text{П Л3}^{**}.\quad \log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Правило П Л3 удобно использовать при решении *строгого* неравенства и не включать в ОДЗ неравенство $a(x)-1 \neq 0$.

Если $g(x) \equiv 1$, то правило П Л3 принимает вид правила П Л4:

$$\boxed{\text{П Л4}.\quad \log_{a(x)} f(x) \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)(f(x)-1) \vee 0,}$$

или

$$\text{П Л4}^{*}.\quad \log_{a(x)} f(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-1) \vee 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \qquad (7)$$

$$\text{П Л4}^{**}.\quad \log_{a(x)} f(x) \vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-1}{a(x)-1} \vee 0 \qquad (8)$$

Важное примечание.

Во-первых, $y = \log_{a(x)} f(x)$ не является логарифмом. Это просто сокращённое обозначение частного двух логарифмов.

Во-вторых, логарифм с переменным основанием не является монотонной функцией, и для него общие правила для монотонных функций не применимы. Для вывода правил П Л3 и П Л4 мы воспользовались *двумя* правилами для монотонной функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ и правилом для знака дроби.

Следствие.

При традиционном способе решения неравенств вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ обычно рассматривают два случая: $a(x) > 1$ и $0 < a(x) < 1$.

Решают неравенства, ссылаясь на монотонность логарифмических функций. Но, как видно из определения, функция $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$ не является логарифмической. Однако, «привычные» неравенства имеют место. Это можно показать по-разному.

Во-первых, это сразу следует из найденных правил П Л3 и П Л4.

Во-вторых, эти свойства следуют и из определения логарифма с переменным основанием.

Например,

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}-\frac{\lg g(x)}{\lg a(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)-\lg g(x)}{\lg a(x)}\ge 0.$$

А тогда

1) если $a(x)>1$, то $\lg a(x)>0 \Rightarrow \lg f(x)-\lg g(x)\ge 0 \Rightarrow .f(x)\ge g(x)$ *в ОДЗ*,

2) если $0<a(x)<1$, , то $\lg a(x)<0 \Rightarrow \lg f(x)-\lg g(x)\le 0 \Rightarrow f(x)\le g(x)$ *в ОДЗ*,

т. е. $\log_{a(x)} f(x)\ge \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a(x)>1,\\ f(x)\ge g(x)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}0<a(x)<1,\\ 0<f(x)\le g(x).\end{cases}\end{array}\right.$

Это ещё раз даёт нам основание иногда работать с частным двух логарифмов $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$ как с одним логарифмом с «постоянным» основание.

Преимущество и красота приведенных выше правил состоит **в** том, что мы *за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований,* и теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

Заметим, что правила формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{\left(x+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0.$

► Воспользуемся П Л4*:

$$\log_{\left(x+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+\frac{5}{2}>0, x\ne 5,\\ \left(x+\frac{5}{2}-1\right)\left(\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2-1\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right).$$

Ответ. $\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right).$ ◄

b) Неравенство вида

$$\frac{\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)}{h(x)}\vee 0.$$

Правила П Л3 и П Л4 дают возможность намного проще и красивее решать неравенства вида $F(x)\vee 0,$ содержащие или разность $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x),$ или $\log_{a(x)} f(x),$ или их произведение в виде множителей.

Тогда, воспользовавшись П Л3 для числителя, получим

$$\frac{\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(a(x)-1)(f(x)-g(x))}{h(x)}\vee 0 \qquad (9)$$

или в другой форме

$$\frac{\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^{**}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-g(x)}{(a(x)-1)h(x)}\vee 0. \qquad (10)$$

Для неравенств вида $\dfrac{\log_{a(x)} f(x)}{h(x)}\vee 0$ получаем соответственно

$$\frac{\log_{a(x)} f(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(a(x)-1)(f(x)-1)}{h(x)}\vee 0 \qquad (11)$$

или $$\frac{\log_{a(x)} f(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^{**}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-1}{(a(x)-1)h(x)}\vee 0. \qquad (12)$$

Сейчас мы нарушим тенденцию сначала решать более простые примеры, а затем более сложные. На олимпиаде МФТИ 2019-2020г был дан очень интересный пример. Его мало кто решил. Он, на взгляд автора, достаточно сложный, его практически невозможно решить обобщённым методом интервалов – много корней на $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, плохие «пробные» точки.

Поэтому при первом чтении этот пример можно пропустить, а, « набив руку», к нему надо обязательно вернуться.

Пример 2. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\log_{1-16x^4}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\right)\ge 1$$

► Условие громоздкое. Поэтому найдём ОДЗ отдельно:

$$\begin{cases}\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}>0,\\ 9x^2-8x+5\ne 6,\\ 1-4x^2>0,\\ x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{9}\right)\cup\left(-\frac{1}{9};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

С чего начать? Наверное, многие сначала перейдут во всех логарифмах к постоянному основанию, т. к. с переменным основанием не очень «дружат», а потом можно пользоваться правилами для логарифма с постоянным основанием или, если возможно, решать как-то по-другому.

Мы, согласно заявленной теме, перейдём в 3-ем логарифме к уже имеющемуся в условии переменному основанию:

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\log_{1-16x^4}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\right)\ge 1\Leftrightarrow$$

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)+\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)}\ge 1$$

Видно, что здесь два логарифма связаны нелинейным неравенством.

Обозначим $\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)=u, \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)=v$

Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{uv+1}{u+v}\ge 1\Leftrightarrow\frac{uv+1-u-v}{u+v}=\frac{u(v-1)-(v-1)}{u+v}=\frac{(u-1)(v-1)}{u+v}\ge 0.$$

Теперь подставим u, v, а затем воспользуемся дважды П Л3* для числителя и П Л4 для знаменателя:

$$\frac{\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)-1\right)\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)-1\right)}{\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-16x^4\right)}\ge 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\left(1+4x^2\right)-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\right)\right)\left(\left(1-4x^2\right)-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\right)\right)}{\left(1-16x^4-1\right)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}-1\right)^3}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{11}\right)}{x^2(x-1)\left(x+\frac{1}{9}\right)}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{5};-\frac{1}{9}\right)\cup\left[-\frac{1}{11};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$$

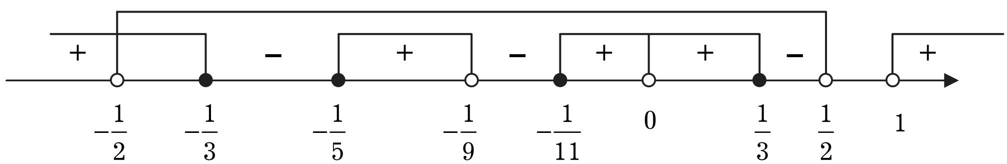

Рис. 1

С учётом ОДЗ, $x\in\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{5};-\frac{1}{9}\right)\cup\left[-\frac{1}{11};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$ – рис. 1.

Ответ. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{5};-\frac{1}{9}\right)\cup\left[-\frac{1}{11};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$.

«Красивое» решение? А что даст обобщённый метод интервалов? ◄

Вернёмся к более простым примерам, некоторые из которых могут быть решены абсолютно «по-школьному».

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0.$

Приведём три способа решения такого неравенства (в методической литературе чаще всего вы встретите первый).

Первый способ (традиционный)

► Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases}\dfrac{2x+2}{5x-1}>0,\\ \dfrac{2x+2}{5x-1}\ne 1,\\ 10x^2+x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Будем рассматривать два случая.

1) Если $\dfrac{2x+2}{5x-1}>1\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{1}{5};1\right)$, то $10x^2+x-2\le 1\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{2}\right]$ в ОДЗ.

Учтем условие $\dfrac{2x+2}{5x-1}>1$ и ОДЗ – получим в этом случае, что $x\in\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right]$.

2) Если $0<\dfrac{2x+2}{5x-1}<1\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то

$$10x^2+x-2\ge 1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Учтём условие $0<\dfrac{2x+2}{5x-1}<1$ и ОДЗ – получаем, что $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Объединяя оба случая, получаем **Ответ.** $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. ◄

Второй способ (с использованием П Л4**)

►Воспользуемся П Л4**, т. е. включим ОДЗ в правило:

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+2}{5x-1}>0,\\ 10x^2+x-2>0,\\ \dfrac{10x^2+x-2-1}{\dfrac{2x+2}{5x-1}-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty).$$

Ответ. $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. ◄

Третий способ (с использованием П Л4)

► Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+2}{5x-1}>0,\\ \dfrac{2x+2}{5x-1}\neq 1,\\ 10x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Воспользуемся П Л4 :

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\leq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2x+2}{5x-1}-1\right)\left(10x^2+x-2-1\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{x-\frac{1}{5}}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right]\cup\left(\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty).$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$.

Система решалась классическим методом интервалов для рациональных функций.

Ответ. $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. Выбирайте способ сами!◄

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{\left(\log_{(1+x)}(1-x)+1\right)\left(\log_{(1+x)}(1-x)+\frac{1}{2}\right)}{\log_{(1+x)}(1-x)+2}\leq 0.$

► Заметим, что неравенство можно решать, обозначив $t=\log_{(1+x)}(1-x)$.

Мы этого делать не будем.

Неравенство громоздкое – поэтому найдём сначала

$$ОДЗ^*:\ \begin{cases} 1-x>0,\\ 1+x>0,\\ 1+x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;1)$$

Теперь немного преобразуем выражения в скобках, а затем воспользуемся П Л4 для каждого множителя числителя и для знаменателя:

$$\frac{\left(\log_{(1+x)}(1-x)+1\right)\left(\log_{(1+x)}(1-x)+\frac{1}{2}\right)}{\log_{(1+x)}(1-x)+2}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_{(1+x)}\left(1-x^2\right)\right)\left(\log_{(1+x)}(1-x)^2(1+x)\right)}{\log_{(1+x)}(1-x)(1+x)^2}\leq 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{x^2\left(1-x^2-1\right)\left((x-1)^2(1+x)-1\right)}{x\left((1-x)(1+x)^2-1\right)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{x^3\left(x^2-x-1\right)}{\left(x^2+x-1\right)}\le 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt5}{2}\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt5}{2};\frac{1+\sqrt5}{2}\right].$$

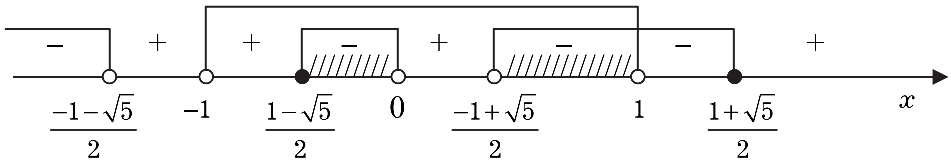

Рис.2

Учтём ОДЗ* и получим **Ответ.** $\left[\frac{1-\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(\frac{\sqrt5-1}{2};1\right).$

Легко было бы решить такое неравенство обобщённым методом интервалов? ◀

Займёмся теперь примером, с которого начали статью (в предыдущем номере). Он интересен тем, что допускает *слишком много* способов оформления решения.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge -1.$

► Так оформлено решение в $[7]$:

$$«\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge -1;\ \begin{cases}\dfrac{\lg(x-1)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\ge -1,\\ x\ne 2\end{cases};\ \frac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0;\ \begin{cases}\dfrac{(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1}{\left(\frac{x}{6}\right)-1}\ge 0,\\ x>1, x\ne 2\end{cases}»$$

Первый способ (правило П Л4)

Приведём неравенство к общему знаменателю:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge -1\Leftrightarrow\frac{1+\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\log_{(x-1)}(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0$$

Теперь воспользуемся дважды правилом П Л4:

$$\frac{\log_{(x-1)}(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0, x\ne 2\\ \dfrac{(x-2)\left((x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1\right)}{(x-2)\left(\frac{x}{6}-1\right)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(2;3]\cup(6;+\infty).$$

Ответ. $x\in(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty)$.

Второй способ (по-школьному)

Приведём неравенство к общему знаменателю:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{1+\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{(x-1)}(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\geq 0.$$

Теперь рассмотрим, *как в школе*, все возможные случаи для основания логарифма.

Надо сказать, что на вопрос, почему так можно поступать, не ответит практически никто:

1) $\begin{cases} x-1>1, \\ \frac{x}{6}>1 \end{cases}$, $(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)\geq 1, x\leq -2, x\geq 3 \Rightarrow x>6$ – решение

2) $\begin{cases} x>2, \\ \frac{x}{6}<1 \end{cases} \Rightarrow 0<(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)\leq 1, x\in[-2;3] \Rightarrow x\in(2;3]$ – решение

3) $0<x-1<1 \Rightarrow x<6, (x-1)\left(\frac{x}{6}\right)\leq 1, x\in[-2;3] \Rightarrow x\in(1;2)$ – решение.

Ответ $(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty)$.

Третий способ

Перейдём к основанию $\frac{x}{6}$:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{6}\right)}(x-1)}}\geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{6}\right)}(x-1)\geq -1, \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{6}\right)}\frac{x(x-1)}{6}\geq 0, & (**) \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Неравенство (**) школьники могут решить по-разному.

Можно воспользоваться П Л4:

$$\log_{\left(\frac{x}{6}\right)}\frac{x(x-1)}{6}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0, x\neq 6, \\ \left(\frac{x}{6}-1\right)\left(\frac{x(x-1)}{6}-1\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1,3]\cup(6,+\infty),$$

а можно и «по-школьному»:

$$\log_{\left(\frac{x}{6}\right)}\frac{x(x-1)}{6}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{6}>1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{6}>1 \Leftrightarrow x>6, \\ \begin{cases} 0<\frac{x}{6}<1, \\ 0<\frac{x(x-1)}{6}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3]. \end{array}\right.$$

Так как $x\neq 2$, получаем **Ответ.** $(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty)$.

Четвёртый способ (правило П Л4 – как в [7])

Воспользуемся определением логарифма по переменному основанию.

Возьмём в качестве c, например, 10 (более знакомое основание), а затем приведём дробь к общему знаменателю

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\geq -1\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg(x-1)}}\geq -1\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\lg(x-1)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\geq -1,\\ x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\geq 0,\\ x\neq 2\end{cases}$$

Систему можно решать тоже по-разному.

Можно воспользоваться, например, дважды П Л2

$$\text{П Л2.}\quad \log_a f(x)\vee 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}(a-1)(f(x)-1)\vee 0$$

при $a=10$. Так, судя по всему, решают составители ЕГЭ,

$$\frac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases}x>1, x\neq 2,\\ \dfrac{(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1}{\left(\frac{x}{6}-1\right)}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty).$$

Можно решить и так:

$$\begin{cases}\dfrac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\geq 0,\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>6\Rightarrow(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)>5>1\\ \begin{cases}0<\frac{x}{6}<1, x\neq 2,\\ 0<(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)\leq 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(2;3].$$

Примечание. Именно этот способ, видимо, *имели в виду* составители ЕГЭ, но ничего об этом не сказали, а записали выкладки, ни на что не ссылаясь. А в школе такого способа нет!

Как могут реагировать школьники и учителя на такую форму записи? Тем более, что, в отличие примера 2, этот «вполне нормально» решается «по-школьному»

На взгляд автора, в официальном пособии, адресованном всей стране, это недопустимо.

Ответ. $x\in(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty)$.

Пятый способ

Можно сделать и так:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)}\ge -1 \Leftrightarrow \frac{1+\log_{(x-1)}x-\log_{(x-1)}6}{\log_{(x-1)}x-\log_{(x-1)}6}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{(x-1)}x(x-1)-\log_{(x-1)}6}{\log_{(x-1)}x-\log_{(x-1)}6}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, x\ne 2, \\ \dfrac{(x-1-1)\left(x(x-1)-6\right)}{(x-1-1)(x-6)}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty).$$

Ответ $x\in(1,2)\cup(2,3]\cup(6,+\infty)$. ◄

Каково экспертам проверять эту задачу!

Пример 6. Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

►Пример громоздкий, но допускает алгоритмичное решение.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{3}-x>0, \\ 2x+\frac{1}{3}\ne 0, \\ 2x+\frac{1}{3}\ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right).$

Обратим внимание на то, что $\log_2\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|$.

Сначала преобразуем неравенство, используя определение логарифма с переменным основанием.

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\frac{\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}>\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-\frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log^2{}_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-3\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|+2\log^2{}_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}{\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}>0$$

После разложения квадратного относительно $\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)$ трехчлена на множители заметим, что $\frac{1}{3}-x>0$ в ОДЗ. Затем для каждого множителя воспользуемся соответствующими правилами П Л1 и П Л2, а также тем, что $|f(x)|-|g(x)|\vee 0 \Leftrightarrow (f(x)+g(x))(f(x)-g(x))\vee 0$:

$$\frac{\log^2{}_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-3\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|+2\log^2{}_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}{\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-2\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)}{\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|}>0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{1}{3}-x\right)-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\left(\frac{1}{3}-x\right)-\left|2x+\frac{1}{3}\right|^2\right)}{\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1}>0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}-x-2x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-x+2x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}>0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)\in ОДЗ$$

Ответ. $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$.

Замечание. Сколько же надо писать, если не воспользоваться соответствующими правилами! ◄

Пример 7. Решите неравенство

$$\log_{|3x-3|}\left(25^x-9^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right).$$

► Найдём ОДЗ: $\begin{cases} |3x-3|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, \\ 5^x-3^x>0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x-1>0 \Leftrightarrow x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$

Преобразуем неравенство, а затем воспользуемся П Л3, П П2, а также тем, что $|f(x)|-|g(x)|\vee 0 \Leftrightarrow (f(x)+g(x))(f(x)-g(x))\vee 0$:

$$\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \log_{|3x-3|}\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\left(|3x-3|-1\right)\left(5^x-3^x-5^{x-1}-3^{x-1}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\right)<0\Leftrightarrow\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right).$$

С учётом ОДЗ, получаем

Ответ. $\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$. ◄

Продолжение следует

Литература

1. *Колесникова С.И.* Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 6-изд. допущено ФИПИ.
2. *Колесникова С.И.* Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 4-е изд.
3. *Колесникова С.И.* Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, «ВАКО», 2011
4. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения. Москва, ООО «Азбука»
5. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства .Москва, ООО «Азбука»
6. Потенциал, 2005 г.
7. Типовые варианты экзаменационных заданий. Под редакцией И. В. Ященко, 50 вариантов. 2021 г, стр. 204; 2018 г, 36 вар, стр. 240.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Как отличить физика от математика?

Всё просто: попросите его обойти столб кругом. Если спросит: «Зачем?» — значит, физик. Если спросит «По или против часовой стрелки?» — значит, математик.