**Олег Павлович Виноградов**
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета Московского
государственного университета имени М.В.Ломоносова

# Бросание монеты и числа Фибоначчи

Одна из самых известных последовательностей натуральных чисел – это последовательность чисел Фибоначчи. В этой последовательности $(F_1, F_2, ...)$ каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Более точно $F_1 = F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ для $n \geq 3$. Выпишем несколько первых членов:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,$$
$$F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21.$$

Первые четырнадцать чисел Фибоначчи впервые были приведены в 1228 году в рукописи Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Эти числа были известны в древней Индии намного раньше, чем стали известны в Европе. Числа Фибоначчи, тесно связанные с таким понятием, как золотое сечение, встречаются в поэзии, музыке, живописи, даже в природе. Этим числам посвящено большое количество литературы.

Существует много разнообразных соотношений, которые связывают между собой числа Фибоначчи. С этими соотношениями и способами их получения можно ознакомиться, например, в [1] и [2].

*Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (около 1170 — около 1250 гг.)*

В этой работе мы рассмотрим подход, который, используя элементарные сведения из теории вероятностей, дает возможность устанавливать соотношения, связывающие числа Фибоначчи. А именно, докажем, что для всех $n \geq 2$ справедливо равенство

$$\frac{F_1}{2}+\frac{F_2}{2^2}+\frac{F_3}{2^3}+\frac{F_4}{2^4}+...+\frac{F_n}{2^n}=2-\frac{F_{n+3}}{2^n}.$$

Заметим, что это равенство предлагается доказать в [2] в качестве домашнего задания под №15.

**Основные результаты.** Пусть правильная монета бросается до тех пор, пока не будет выброшено два орла подряд. После этого бросание прекращается. Пусть $A_n$ – событие, которое заключается в том, что бросание прекращается на $n$-м бросании, и пусть $p_n$ – вероятность этого события. Таким образом, $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

Каждый конкретный результат опыта будем называть исходом или элементарным событием. Если монета бросается $n$ раз, то каждый из исходов этого опыта можно представить как строчку из $n$ букв, каждая из которых является буквой О или Р. Например, если мы бросим монету два раза, то все различные исходы этого опыта можно записать в виде: (Р,Р), (Р,О), (О,Р), (О,О). Так, третий по счету исход (О,Р) означает, что при первом бросании был выброшен орел, а при втором решка. Если же монета брошена 8 раз, и орел выпал только при 1-м и 7-м бросаниях, а в остальных бросаниях выпала решка, то такому исходу соответствует строчка (О,Р,Р,Р,Р,Р,О,Р). Два исхода будем считать различными, если найдется такое число $k(1 \leq k \leq n)$, что в $k$-м по счету бросании в одном из исходов выпадет решка, а в другом – орел.

Возникает следующий вопрос: чему равно число всех различных исходов или, как следует из предыдущего, сколько существует различных строчек из $n$ букв, каждая из которых является буквой О или Р. Обозначим это число через $M_n$.

Если $n = 1$, то монета бросается один раз, и число различных исходов равно двум: выпадет орел или решка. Поэтому $M_1 = 2$. Для случая $n = 2$ мы выше перечислили все возможные исходы и $M_2 = 4$. Если мы перейдем от случая, когда число бросаний равно $n$, к случаю, когда число бросаний равно $(n+1)$, то каждому исходу при $n$ бросаниях соответствует 2 исхода при $(n + 1)$-м бросании. Например, для случая $n = 2$ исходу (ОР) соответствуют исходы (ОРР) и (ОРО) при $n = 3$. Поэтому при переходе от $n$ к $(n + 1)$ число исходов удваивается. Таким образом, для всех $n \geq 1$ имеет место равенство

$$M_{n+1} = 2M_n. \tag{2}$$

Так как $M_1 = 2$, то из (2) легко получить, что $M_n = 2^n$. Тем самым, доказана

**Лемма 1.** Число всех различных исходов при бросании монеты $n$ раз равно $2^n$.

Подсчитаем вероятность $p_n$ по формуле классической вероятности. Обозначим через $a_n$ – число благоприятных событий. Тогда

$$p_n = \frac{a_n}{2^n}.$$

Заметим, что любое благоприятное событие заканчивается буквами О,О.

Нетрудно видеть, что:

- Для $n = 2$ благоприятное событие одно, а именно, (О,О). Поэтому $a_2 = 1 = F_1$.
- Для $n = 3$ благоприятное событие одно, а именно, (Р,О,О). Поэтому $a_3 = 1 = F_2$.
- Для $n = 4$ благоприятных событий два, а именно, (Р,Р,О,О), (О,Р,О,О). Поэтому $a_4 = 2 = F_3$.
- Для $n = 5$ благоприятных событий три, а именно, (О.Р,Р,О,О), (Р,Р,Р,О,О), (Р,О,Р,О,О). Поэтому $a_5 = 3 = F_4$.
- Для $n = 6$ благоприятных событий пять, а именно, (Р.О.Р,Р,О,О), (О,Р,Р,Р,О,О), (Р,Р,Р,Р,О,О), (О,Р,О,Р,О,О), (Р,Р,О,Р,О,О). Поэтому $a_6 = 5 = F_5$.

Можно высказать гипотезу, что для всех $n \geq 2$ справедливо равенство $a_n = F_{n-1}$. Имеет место

**Лемма 2.** Для всех $n \geq 2$ справедливо равенство $a_n = F_{n-1}$.

**Доказательство.** Для любого $n \geq 4$ множество благоприятных событий можно разбить на два непересекающихся подмножества, одно из которых обязательно произойдет. А именно, к первому из них относятся те, события у которых при первом бросании будет выброшена решка. Рассматривая частные случаи, приведенные выше, нетрудно понять, что число таких благоприятных событий равно $a_{n-1}$. Грубо говоря, если в первый раз выпадает решка, то мы как бы снова начинаем бросания, число которых уже равно $n - 1$.

Ко второму из подмножеств относятся те события, у которых при первом бросании будет выброшен орел, а при втором – решка. Рассуждая, как в предыдущем случае, увидим, что число таких благоприятных событий равно $a_{n-2}$. Поэтому при $n \geq 4$ имеет место равенство $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Аналогичному соотношению удовлетворяют числа Фибоначчи. Так как мы показали, что $a_2 = a_3 = 1, a_4 = 2$, то для $n \geq 2$ справедливо равенство $a_n = F_{n-1}$.

**Лемма 2 доказана.**

Пусть $B_n$ – событие, которое заключается в том, что, проведя $n$ бросаний, мы ни разу не получим подряд двух орлов. Положим $q_n = \mathrm{P}(B_n)$. Обозначим через $b_n$ – число благоприятных событий. Тогда по формуле классической вероятности

$$q_n = \frac{b_n}{2^n}.$$

Имеет место

**Лемма 3.** Для всех $n \geq 2$ справедливо равенство $b_n = F_{n+2}$.

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Нетрудно видеть, что для $n = 2$ благоприятных событий три, а именно, (О,Р), (Р,Р),(Р,О). Поэтому $b_2 = 3 = F_4$. Для $n = 3$ благоприятных событий пять, а именно, (Р,О,Р), (О,Р,Р), (Р,Р,Р,), (О,Р,О), (Р,Р,О). Поэтому $b_3 = 5 = F_5$. Для любого $n \geq 4$ множество благоприятных со-бытий можно разбить на два непересекающихся подмножества, одно из которых обязательно произойдет.

К первому из них относятся те события, у которых при первом бросании будет выброшена решка. Рассуждая точно так же, как в доказательстве леммы 2, получаем, что таких благоприятных событий равно $b_{n-1}$.

Ко второму из подмножеств относятся те события, у которых при первом бросании будет выброшен орел, а при втором – решка. Число таких благоприятных событий равно $b_{n-2}$.

Поэтому при $n \geq 4$ имеет место равенство $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$. Аналогичному соотношению удовлетворяют числа Фибоначчи. Так как мы показали, что $b_2 = 3, b_3 = 5$, то для $n \geq 2$ справедливо равенство $b_n = F_{n+2}$.

**Лемма 3 доказана.**

Напомним некоторые простые сведения из теории вероятностей.

1. Противоположным событием к событию $A$ называется такое событие $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда $A$ не происходит. Для каждого события $A$ выполняется равенство $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})$.

2. Суммой событий $H_1, H_2, ..., H_n$ называется событие $H$, которое заключается в том, наступит хотя бы одно из этих событий, и обозначается как $H = H_1 + H_2 + ... + H_n$.

3. События $H_1, H_2, ..., H_n$ называются несовместными, если наступление любого из них из них исключает наступление любого другого.

4. Для несовместных событий $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(H_2) + ... + \mathrm{P}(H_n)$.

Нетрудно видеть, что имеет место

**Лемма 4.**

Для всех $n \geq 2$ справедливо равенство $\bar{B}_n = A_2 + A_3 + ... + A_n$.

Из перечисленных выше свойств вероятности вытекает

**Лемма 5.**

$$\mathrm{P}(\bar{B}_n) = \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + ... + \mathrm{P}(A_n) = 1 - \mathrm{P}(B_n).$$

Отсюда и из лемм 2 и 3 вытекает

**Теорема.** Для $n \geq 2$ справедливо равенство

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2^2} + \frac{F_3}{2^3} + \frac{F_4}{2^4} + ... + \frac{F_n}{2^n} = 2 - \frac{F_{n+3}}{2^n}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Из леммы 5 вытекает, что

$$1 - \frac{b_n}{2^n} = \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ... + \frac{a_n}{2^n}.$$

Отсюда и из лемм 2 и 3 следует, что

$$1 - \frac{F_{n+2}}{2^n} = \frac{F_1}{2^2} + \frac{F_2}{2^3} + ... + \frac{F_{n-1}}{2^n}.$$

Умножив обе части полученного равенства на два и заменяя $n$ на $n+1$, получим утверждение теоремы.

**Теорема доказана.**

**Замечание.** Автор работы [2] эту теорему предлагает доказать методом математической индукции. Доказательство справедливости формул методом математической индукции предполагает, что на основании догадки, которая возникла на основании рассмотрения частных случаев, высказывается предположение о виде этой формулы. Например, можно заметить, что

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2.$$

Исходя из этих частных случаев, можно высказать предположение, что

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

(кстати, справедливость этого равенства заметил академик А.Н. Колмогоров, когда ему было всего пять лет) и пытаться доказать эту формулу, применяя метод математической индукции. По нашему мнению, нужно обладать сверхъестественной интуицией, чтобы написать соотношение (3), основываясь на частных случаях, как в приведенном примере.

В математической литературе рассматривается также последовательность $(T_1, T_2, ...)$, в которой каждый последующий член равен сумме трех предыдущих. Более точно

$$T_1 = T_2 = 1, T_3 = 2$$

$$\text{и } T_n = T_{n-3} + T_{n-2} + T_{n-1}$$

$$\text{для } n \geq 4.$$

Выпишем несколько первых членов

$$T_1 = T_2 = 1, T_3 = 2,$$

$$T_4 = 4, T_5 = 7, T_6 = 13, T_7 = 24.$$

Последовательность таких чисел называют последовательностью Фибоначчи, а члены этой последовательности числами Фибоначчи.

Рассуждая точно так же, как и ранее, можно показать, что

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{T_{k-2}}{2^k} = 1 - \frac{T_{n+2}}{2^n}.$$

Учитывая, что $T_1 = T_2 = 1$, это выражение можно переписать в более красивом виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{2^k} = 4 - \frac{T_{n+4}}{2^n}.$$

Доказательство этой формулы предоставляется читателю.

**Литература**

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

2. Костин С.В. О методах доказательства свойств чисел Фибоначчи. Математика в высшем образовании 2016, №14, 25-42.

http://www.mvo.unn.ru/files/2020/03/nom14_003_kostin.pdf

## НОВОСТИ

### Физики МГУ продемонстрировали оптическое усиление в коллоидных растворах полупроводниковых нанопластинок

Сотрудники физического факультета – участники НОШ МГУ «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина» совместно с коллегами с химического факультета исследовали особенности поглощения коллоидных гетероструктурных нанопластинок на основе селенида кадмия в режиме однофотонного стационарного возбуждения экситонов мощными наносекундными лазерными импульсами. Результаты позволят использовать оптически активные полупроводниковые наноструктуры с контролируемыми оптоэлектронными свойствами при создании лазерных сред и нелинейно-оптических ограничителей. Работа опубликована в журнале Results in Physics.

Полупроводниковые нанокристаллы, в которых движение носителей заряда ограничено в одном, двух или трех направлениях, интересны для применения в оптоэлектронных устройствах: светоизлучающих диодах, солнечных элементах, датчиках и прочих. Они обладают уникальными свойствами, которые можно контролировать разными способами.

В своей новой работе сотрудники МГУ совместно с коллегами сосредоточились на хорошо изученном материале для полупроводниковых нанокристаллов – селениде кадмия – и его наиболее перспективной в оптоэлектронике форме – атомарно тонких нанолистах, или нанопластинках.

Продолжение: https://www.msu.ru/science/main_themes/