



Гончаренко Валерий Евстафиевич
Кандидат технических наук, доцент.

Подобия сиракузской последовательности

Одной из неразрешенных задач математики является гипотеза Коллатца, названная в честь немецкого математика Лотара Коллатца (6.07.1910–26.09.1990), который сформулировал ее 1 июля 1932 года [1]. В соответствии с ней любое натуральное число n , если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1, получая $3n + 1$. Эти вычисления могут выполняться многократно, и гипотеза заключается в том, что какое бы начальное число n мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

В августе 2009 года на платформе BOINC был запущен проект добровольных распределённых вычислений «Collatz Conjecture», целью которого является проверка гипотезы Коллатца на больших числах. Кроме проекта Collatz Conjecture, с августа 2017 года поиском решения этой проблемы стал также заниматься и проект распределённых вычислений yoyo@Home <http://www.rechenkraft.net/yoyo/> По состоянию на апрель 2019 года

проверены все натуральные числа меньше чем 1 152 921 504 606 846 976 и каждое из них за конечное количество шагов соответствовало условиям гипотезы Коллатца [2].

Брайан Хэйес писал: «Трудность задачи заключается не в выписывании последовательности для данного N , а в нахождении общего решения, которое годилось бы для всех исходных значений N . Такое общее решение пока не получено» [3].

Как это принято, будем называть последовательность ряда чисел в соответствии с гипотезой Коллатца сиракузской последовательностью. В дальнейшем условимся обозначать начальные значения чисел через N , а текущие элементы в сиракузской последовательности – через n . Последовательность ряда чисел в соответствии с гипотезой Коллатца можно представить выражением функции

$$f(n) = \begin{cases} 3 * n + 1 & \text{if } n \equiv 1(\text{mod } 2) \\ \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad (1)$$

Нижняя ветвь функции делит четное число на 2, а верхняя — преобразует любое нечетное натуральное число в четное.

Поскольку после преобразования нечетного числа в четное его затем предсказуемо делят на 2, то в исследовательских целях можно выражение функции (1) заменить на выражение (2)

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3*n+1}{2} & \text{if } n \equiv 1(\text{mod } 2) \\ \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases} \quad (2)$$

Вся интрига гипотезы заключается в верхней функции системы, в результате выполнения которой новое значение n может оказаться либо четным, либо нечетным и соответственно в последующем будет либо увеличиваться, либо уменьшаться.

Если игнорировать прибавление единицы, то нечетные числа в ряду увеличиваются примерно в $3/2 = 1,5$ раза, а четные числа уменьшаются в 2,0 раза. Можно ожидать несколько раз подряд увеличение примерно в 1,5 раза или последовательное уменьшение несколько раз в 2 раза.

Для наглядности представим число N в виде кузнечика, сидящего на одной из пронумерованных ступенек бесконечной лестницы. Система (1) определяет, на какую ступеньку он прыгнет в очередной раз. Если он преимущественно будет прыгать вверх, то мы его потеряем в бесконечности, а в противоположном случае он неизбежно окажется на первой ступеньке, что, собственно, и утверждает гипотеза.

Проведем анализ функций системы (2) и обратим внимание на значение делителя, равного двум, который является наименьшим целочисленным делителем. Делитель, равный единице, может претендовать на наименьший, но в этом случае кузнечик никуда прыгать не будет и задача теряет смысл. Выбор делителя в чем-то напоминает двоичную систему счисления, когда уже невозможно уменьшить количество цифр для представления чисел. В наш век информационных технологий невозможно переоценить значимость этой системы счисления и кодирования данных с использованием всего двух кодов. Однако при необходимости можно и нужно использовать системы счисления с большим количеством цифр, таких как десятичная, восьмиричная и шестнадцатиричная системы счисления. С математической точки зрения можно создать систему счисления с любым основанием, весь вопрос состоит в целесообразности её использования. Исходя из представленной аналогии зададимся вопросом: как можно представить системы (1) или (2) с иными целочисленными делителями? Такая система представлена в [4].

В ряду натуральных чисел необязательно рассматривать только делимость на 2, именно по признаку делимости на 2 числа подразделяются на четные и нечетные. Двойка — это наименьший делитель, который делит число на более чем одну часть, в том смысле, что единица делит все числа без остатка и при этом значение числа не изменяется. Следующим после двойки можно

рассмотреть значение делителя, равное трем. В этом случае возможны три результата целочисленного деления: $n \equiv 0(\text{mod } 3)$, $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. В случае получения целочисленного остатка, отличного от нуля, необходимо разработать общую форму приведения числа к делимости на 3, но это взаимосвязано с множителем в верхней ветви функции ряда (1). Возникает правомерный вопрос: каким должно быть значение множителя в верхней ветви функции ряда (1), если в нижней ветви функции использовать делитель 3? Если использовать решение этого вопроса в исходной гипотезе

Коллатца, то множитель на 1 больше делителя, следовательно, для делителя 3 можно использовать множитель 4 и так по аналогии с другими значениями делителей.

Используем нотацию функции, возвращающей остаток целочисленного деления $f(n) = \text{mod}(n; d)$, где d – делитель. Для делителя 3 выражение по преобразованию числа к его делимости на 3 можно представить в следующем виде $4 * n + (3 - \text{mod}(n; 3))$, а в общем случае $(d + 1) * n + (d - \text{mod}(n; d))$, тогда функцию ряда для различных значений делителей можно представить в следующем виде [4]:

$$f(n, d) = \begin{cases} (d + 1) * n + (d - \text{mod}(n; d)) & \text{if } n \not\equiv 0(\text{mod } d) \\ \frac{n}{d} & \text{if } n \equiv 0(\text{mod } d) \end{cases} \quad (3)$$

Если преобразованное к делимости на d значение элемента ряда сразу делить на d , то выражение (3) можно представить как

$$f(n, d) = \begin{cases} \frac{(d + 1) * n + (d - \text{mod}(n; d))}{d} & \text{if } n \not\equiv 0(\text{mod } d) \\ \frac{n}{d} & \text{if } n \equiv 0(\text{mod } d) \end{cases} \quad (4)$$

Опытным путем было проверено, для каких значений делителя d могут формироваться подобира сиракузской последовательности.

Поскольку вычислительные операции функции (3) простые, то нет необходимости в представлении исходного кода программы, в которой можно предусмотреть ввод интервала исходных значений N и запись в файл полученных результатов.

Были выполнены расчеты для значений делителей от 2-х до 20-ти

в интервале значений начала ряда от 1 до 100 млн. Для значений делителей 5, 7, 8, 13, 14, 18, 19 во всех случаях начальных значений N достигалось значение 1. Для остальных делителей указанного интервала наблюдалось заикливание, заключающееся в бесконечном повторении фрагмента вычислений n . В таблице 1 представлены характерные параметры для функции (3) со значениями делителей 2 и 5.

Таблица 1

Максимальные значения рядов

Делитель $d = 2$ (сиракузская последовательность)			Делитель $d = 5$ (подобие)		
N	Максимальное значение	Длина пути	N	Максимальное значение	Длина пути
1	1	0	1	25	9
2	2	1	6	50	12
3	16	7	7	500	31
7	52	16	31	23 200	129
15	160	17	307	42 550	234
27	9 232	111	438	84 475	101
255	13 120	47	451	1 116 675	175
447	39 364	97	2869	1 141 300	136
639	41 524	131	3936	1 346 275	244
703	250 504	170	3942	2 257 825	244
1 819	1 276 936	161	4488	11 051 875	147
4 255	6 810 136	201	6169	67 389 925	179
4 591	8 153 620	170	11 023	86 283 525	363
9 663	27 114 424	184	21 924	1 482 636 650	467
20 895	50 143 264	255	78 432	1 776 132 700	398
26 623	106 358 020	307	12 9828	2 054 804 500	523
31 911	121 012 864	160	46 4988	2 105 925 650	416
60 975	593 279 152	334	581 647	2 127 244 850	357
77 671	1 570 824 736	231	840 324	2 134 232 300	334

Характерно, что значение максимального значения элемента многократно повторяется для различных N , что является признаком многократного повторения одинаковых фрагментов последовательностей элементов в рядах для различных N и является характерным для сиракузских последовательностей. Например, для $N = 155...159$ во всех случаях достигается наибольшее значение 23 200 и оно многократно повторяется на диапазоне значений N от 31 до 307.

Если в представленных системах изменить порядок приведения числа n к делимости на натуральный дели-

тель d , например, при $d = 2$ использовать выражение $f(n) = 5 * n + 1$, то его значение будет стремительно возрастать без всякой надежды на возвращение к значению, равному 1. Попробуем найти количественную оценку ряда, в котором возможно за конечное число шагов принятие значения, равного 1. Оценим значения вероятностей получения n по признаку его делимости. Вероятность случайного события равна отношению количества благоприятных исходов к их общему количеству. В данном случае благоприятным исходом будем считать получение числа, которое делится без остатка. При

делителе, равном двум, возможны два исхода – получение четного или нечетного числа с вероятностями $\frac{1}{2}$. Отметим, что сумма вероятностей всех исходов случайного события равна единице. Количество исходов делимости равно значению делителя, при значении $d = 5$ возможны целочисленные остатки 0, 1, 2, 3 и 4, из них благоприятный исход один, а неблагоприятных – четыре, соответственно их вероятности равны $1/5$ и $4/5$. В общем виде вероятность благоприятного исхода равна $1/d$, а вероятность неблагоприятного исхода равна $(d-1)/d$. В первом случае число уменьшается в d раз, а во втором – увеличивается в $\frac{(d+1)+d - \text{mod}(n;d)}{d}$ раз.

Выразим меру изменения числа как произведение вероятности на величину его изменения, получим меру уменьшения $d/d = 1$, а мера увели-

чения $(d-1)/d * \frac{(d+1)}{d}$. Мера умень-

шения для системы (3) всегда будет равна единице, а мера увеличения всегда будет меньше единицы и с увеличением делителя приближается к значению единицы. Таким образом, для системы (3) мера уменьшения числа n всегда больше меры его увеличения. Представленная мера изменения числа n может быть критерием возможности получения подобия сиракузской последовательности.

В заключение приведем высказывание относительно гипотезы Коллатца «Из нерешенных задач теории чисел – эта едва ли самая важная, но она одна из тех, что вызывают сильную досаду. И описание вычислительной процедуры, и ее выполнение чрезвычайно просты, но понять, к чему она может привести, невероятно трудно».

Литература

1. Гипотеза Коллатца. – URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/> (дата обращения: 12.01.2021).
2. Сиракузская последовательность. – URL: <http://wikiredia.ru/wiki/> (дата обращения: 18.01.2021).
3. Брайан Хэйес. Взлёты и падения чисел-градин // Scientific American. – 1984. – № 3. – С. 102–107.
4. Гончаренко В.Е. Анализ гипотезы Коллатца и поиск ее подобий / РЭУ им. Г.В. Плеханова, Ивановский филиал. – Иваново, 2019. Деп. в Академии естествознания 15.09.2019, № 1106.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Физики, Математики и Философы

Ректор университета просмотрел смету, которую ему принес декан физфака, и, вздохнув, сказал:

— Почему это физики всегда требуют такое дорогое оборудование? Вот, например, математики просят лишь деньги на бумагу, карандаши и ластик. И, подумав, добавил:

— А философы, те ещё лучше. Им даже ластик не нужны.