



Юрий Валентинович Нестеренко

Доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН, профессор
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

О вычислении сумм Эйлера

Часть I. Эйлер и Коши

В замечательной книге Леонарда Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых»¹ можно найти следующие удивительные равенства²:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$\frac{1}{1^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$\frac{1}{1^{12}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \dots = \frac{691\pi^{12}}{638512875}.$$

Они означают, что конечные суммы $\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{n^{2m}}$ с ростом количества слагаемых увеличиваются, приближаясь к выписанным справа числам. Числа же, к которым приближаются эти суммы, находятся в рациональном отношении к π^{2m} . Эйлер доводит эти результаты до $2m = 26$, вычисляя рациональные множители и указывая на закономерность, позволяющую находить их. Доказательство, приводимое Эйлером, основано на двух бесконечных представлениях для функции $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Первое представление в виде суммы ряда по степеням переменной x , а второе – в виде бесконечного произведения множителей

¹ Книга была издана на латинском языке в 1744 г. Перевод на русский язык первого тома был опубликован в 1936 г. А в 1961 г. вышел полный перевод в двух томах. Указанные нами равенства содержатся в гл. X, §168 первого тома.

² Первое из этих равенств появилось в 1736 году в письме Эйлера к Даниилу Бернулли.

вида $1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Второе представление аналогично разложению многочлена в произведение линейных сомножителей, отвечающих его корням.

В настоящее время известно несколько различных доказательств указанных выше равенств Эйлера. Мы приводим в этой статье элементарное доказательство, использующее свойства тригонометрических функций. В случае $m = 1$ доказательство похоже на доказательство О. Коши³, хотя и имеет некоторые отличия. Впрочем, основные идеи, конечно, принадлежат Коши.

Нужно также знакомство с понятием «предел последовательности», хотя для понимания рассуждений достаточно интуитивных представлений о пределах. Комплексные числа и формула Муавра

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \quad n \geq 1,$$

справедливая при любом действительном α и используемая в задаче 5, где выводится формула для синуса кратных углов, конечно, могут быть исключены и заменены рассуждениями по индукции. Отметим, что эти формулы и их вывод с помощью формулы Муавра присутствуют в книге Эйлера «Введение в анализ...». Понадобится также формула Ньютона для бинома

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где так называемые биномиальные коэффициенты C_n^k имеют значения

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Все рассуждения, нужные для вычислений значений сумм Эйлера, представлены ниже в виде задач и их решений.

Дзета-функция

Задача 1. Докажите, что при каждом действительном $s > 1$ возрастающая с ростом n последовательность сумм

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}$$

ограничена и потому имеет предел, обозначаемый

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (1)$$

Функция $\zeta(s)$ называется дзета-функцией. По историческим причинам её аргумент принято обозначать буквой s . Такие ряды при различных значениях s изучал Эйлер. Впоследствии дзета-функция стала рассматриваться, как функция действительного переменного $s > 1$. Её свойства тесно связаны со свойствами множества простых чисел. Причиной служит следующее тождество Эйлера:

³ A.L. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique. Paris:1821, Note VIII. Эту книгу можно найти в свободном доступе в интернете.

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \dots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (2)$$

справедливое при каждом $s > 1$. Произведение в (2) содержит бесконечное количество сомножителей, соответствующих всем простым числам p . Под значением такого бесконечного произведения понимается предел при x , стремящемся к бесконечности, конечного произведения

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

взятого по всем простым числам $p \leq x$. Мы не будем здесь доказывать и использовать в дальнейшем тождество Эйлера.

Решение задачи 1. При любом $s > 1$ рассмотрим произведение

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \cdot \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right) - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s}\right).$$

Если раскрыть скобки в правой части полученного равенства, то после приведения подобных членов получим сумму слагаемых вида $\frac{1}{(2k+1)^s}$, при $2k +$

$+1 \leq n$ с коэффициентами 1, сумму слагаемых вида $\frac{1}{(2k)^s}$ при $2k \leq n$ с коэф-

фициентами -1, а также сумму слагаемых вида $\frac{1}{(2k)^s}$, при $n < 2k \leq 2n$ с коэффи-

циентами -2. Отбрасывая группу последних слагаемых, заметим, что коэффициенты при них отрицательны, получим число, равное

$$1 - \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) - \left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) - \dots$$

Это конечное выражение будет заканчиваться членом $-\left(\frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{n^s}\right)$, если

n нечётно, и членом $-\frac{1}{n^s}$, если n чётно. В любом случае указанное произведение будет меньше 1 и, значит

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} < \frac{1}{1 - \frac{2}{2^s}} = \frac{2^s}{2^s - 2}.$$

Это доказывает, что последовательность сумм из условия задачи 1 ограничена. Всякая возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. В рассматриваемом случае этот предел обозначается $\zeta(s)$.

Утверждение задачи 1 можно выразить так:

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\right). \quad (3)$$

В дальнейшем мы заменим при $s = 2m$ слагаемые вида $\frac{1}{k^s}$ некоторыми не очень отличающимися от них по величине числами, для которых сумма под знаком предела в (3) может быть точно сосчитана. Это позволит вычислить предел.

Задача 2. Пусть x – любое число из промежутка $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажите справедливость следующих неравенств

$$а) \quad 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

$$б) \quad 0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \frac{4^m}{x^{2m-2}} \quad (4)$$

при каждом целом $m \geq 1$.

Решение.

а) Нарисуем на плоскости окружность радиуса 1, центр её обозначим буквой O . Выберем на окружности две точки A и B так, что длина дуги AB равна x . Через точку A проведём касательную к окружности, а точку пересечения этой касательной с прямой OB обозначим буквой C . Обозначим также буквой D основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую OA . Из геометрических соображений следуют неравенства для площадей треугольников AOB и AOC

$$S_{AOB} < S < S_{AOC},$$

где буквой S обозначена площадь сектора, ограниченного радиусами AO и BO . Учитывая, что

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin x, \quad S = \frac{1}{2} x, \quad S_{AOC} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

получаем требуемые неравенства.

б) Из неравенства $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ следует $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$. Возводя их в степень $2m$, находим $\frac{1}{\sin^{2m} x} > \frac{1}{x^{2m}} > \operatorname{ctg}^{2m} x$ и

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \frac{1}{\sin^{2m} x} - \operatorname{ctg}^{2m} x &= \frac{1 - \cos^{2m} x}{\sin^{2m} x} = \\ &= \frac{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots + \cos^{2m-2} x}{\sin^{2m-2} x} \leq \left(\frac{1 + \cos x}{\sin x} \right)^{2m-2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2}$, заключаем, что

$$0 < \frac{1}{x^{2m}} - \operatorname{ctg}^{2m} x < \left(\frac{2}{x} \right)^{2m-2} < \frac{4^m}{x^{2m-2}}.$$

Задача 3. При каждом $m \geq 1$ выполняется равенство

$$\zeta(2m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^{2m} \frac{\pi k}{2n+1}.$$

Решение. Обозначим для краткости

$$S_n = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{n^{2m}},$$

$$T_n = \operatorname{ctg}^{2m} \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^{2m} \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^{2m} \frac{n\pi}{2n+1}.$$

Подставляя в неравенства (4) дробь $\frac{\pi k}{2n+1}$ вместо x и складывая почленно получившиеся неравенства при $k = 1, 2, \dots, n$, находим

$$0 < \frac{(2n+1)^{2m}}{\pi^{2m}} S_n - T_n < 4^m \frac{(2n+1)^{2m-2}}{\pi^{2m-2}} \left(\frac{1}{1^{2m-2}} + \frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{1}{3^{2m-2}} + \dots + \frac{1}{n^{2m-2}} \right)$$

и

$$0 < S_n - \frac{\pi^{2m}}{(2n+1)^{2m}} T_n < 4^m \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} < 4^m \frac{\pi^2}{2n+1}.$$

Из этих неравенств, поскольку S_n стремится к $\zeta(2m)$, следует нужное утверждение.

Суммы котангенсов

Числа $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$ составляют множество корней некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Вычислению этого многочлена и некоторых сумм его корней посвящён настоящий раздел.

Задача 4. 1) Докажите тождество

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin^5 \alpha} = 5 \operatorname{ctg}^4 \alpha - 10 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1. \quad (5)$$

2) Найдите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$, и выразите эти числа через радикалы.

Решение. 1) Для доказательства тождества достаточно воспользоваться формулами

$$\sin 5\alpha = \sin 2\alpha \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

2) Подставляя в равенство (5) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$, убеждаемся, что числа

$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$ есть корни многочлена $5x^2 - 10x + 1 = 0$. Учитывая, что котангенс убывает на промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$, заключаем.

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

Задача 5. Пусть n – целое положительное число. Найдите многочлен с целыми коэффициентами степени n , корнями которого являются числа

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1}. \quad (6)$$

Решение. По формуле Муавра имеем тождество

$$\cos(2n+1)\alpha + i\sin(2n+1)\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1}.$$

Пользуясь формулой для бинома и сравнивая коэффициенты при i в левой и правой частях последнего равенства, находим

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)\alpha &= C_{2n+1}^1 \sin\alpha \cos^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \sin^3\alpha \cos^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \sin^5\alpha \cos^{2n-4}\alpha + \dots = \\ &= \sin^{2n+1}\alpha (C_{2n+1}^1 \operatorname{ctg}^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \operatorname{ctg}^{2n-4}\alpha + \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Левая часть получившегося тождества обращается в нуль при подстановке любого из чисел $\frac{\pi}{2n+1}, \frac{2\pi}{2n+1}, \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \frac{n\pi}{2n+1}$, вместо α . Значит, все числа (6) будут корнями многочлена

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots \quad (8)$$

При $n=2$, например, получаем, что числа $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5}$ удовлетворяют квадратному уравнению $5x^2 - 10x + 1 = 0$. Это было установлено в предыдущей задаче.

А при $n=3$ заключаем, что числа $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7}, \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7}$ составляют множество корней многочлена $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} &= 5, \\ \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} &= 3, \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Отметим, что корни уравнения $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ могут быть выражены через радикалы, но в этих выражениях присутствуют комплексные числа. Можно доказать, что ни один из корней – все они действительные числа – не может быть выражен через радикалы от действительных чисел.

Задача 6. Вычислите суммы

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}^4 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^4 \frac{n\pi}{2n+1} \quad (10)$$

Решение. Обозначим числа (6) в порядке следования буквами $t_1, t_2, \dots, t_n$. Эти числа есть корни многочлена (8), поэтому по формулам Виета находим

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

и так же

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2 &= (t_1 + t_1 + \dots + t_n)^2 - 2(t_1 t_2 + \dots + t_{n-1} t_n) = \left(\frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1} = \\ &= \left(\frac{n(2n-1)}{3} \right)^2 - \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{30} = \frac{n(2n-1)(4n^2 + 10n - 9)}{45}. \end{aligned}$$

Задача 7. Докажите, что

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Решение. Пользуясь равенством предыдущей задачи и результатами задачи 3, находим при $m = 1$

$$\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Точно так же при $m = 2$ находим

$$\zeta(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \cdot \frac{n(2n-1)(4n^2 + 10n - 9)}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Часть II. Ньютон и Бернулли

Формулы Ньютона для степенных сумм

В этом разделе мы установим рекуррентные формулы, позволяющие сравнительно легко вычислять значения $\zeta(2m)$.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ переменные, а многочлены $s_1, s_2, \dots, s_n$ от этих переменных определены равенствами

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \quad \dots \quad s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Другими словами, многочлен $s_k = s_k(x_1, \dots, x_n)$ есть сумма всевозможных произведений вида $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, с условиями $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Эти многочлены называются элементарными симметрическими многочленами. Из определения следует, что они не меняются при любой перестановке переменных.

Если $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ многочлен с рациональными коэффициентами и $t_1, \dots, t_n$ его корни, то по *теореме Виета* выполняются равенства

$$s_1(t_1, \dots, t_n) = -a_1, \quad s_2(t_1, \dots, t_n) = a_2, \dots, \quad s_k(t_1, \dots, t_n) = (-1)^k a_k, \dots, \quad s_n(t_1, \dots, t_n) = (-1)^n a_n.$$

Задача 8. Пусть $t_1, \dots, t_n$ числа (6). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_k(t_1, \dots, t_n)}{(2n)^{2k}} = \frac{1}{(2k+1)!}, \quad k \geq 1.$$

Решение. В задаче 5 было доказано, что числа (6) составляют полное множество корней многочлена

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots$$

Поэтому

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = \frac{C_{2n+1}^{2k+1}}{C_{2n+1}^1} = \frac{(2n-2k+1) \cdot (2n-2k+2) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{(2k+1)!}.$$

Так как числитель последней дроби содержит $2k$ сомножителей, получаем нужное утверждение.

В дальнейшем понадобятся также многочлены

$$p_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k \geq 1.$$

В решении задачи 6 было использовано тождество $p_2 = s_1^2 - 2s_2$. Подобные соотношения верны и в общем случае. Следующая теорема позволяет находить выражения многочленов p_k через элементарные симметрические многочлены при любом $k \geq 1^4$.

Теорема 1 (Формулы Ньютона). При *любом натуральном k справедливо соотношение*

$$p_k - p_{k-1}s_1 + \dots + (-1)^{k-1} p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0, \quad \text{если } 1 \leq k \leq n, \quad (11)$$

$$p_k - p_{k-1}s_1 + \dots + (-1)^{n-1} p_{k-n+1} s_{n-1} + (-1)^k p_{k-n} s_n = 0, \quad \text{если } k > n. \quad (12)$$

Например, при $k=3$ и $n>3$ имеем $p_3 - p_2 s_1 + p_1 s_2 - 3s_3 = 0$. Учитывая, что $p_1 = s_1$ и $p_2 = s_1^2 - 2s_2$, находим

$$p_3 = s_1 \left(s_1^2 - 2s_2 \right) - s_2 s_1 + 3s_3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3.$$

⁴ Впервые эти формулы в общем виде были опубликованы И. Ньютоном в 1707 г. в книге «Всеобщая арифметика» и использовались для приближённого вычисления корней многочленов. Перевод на русский язык вышел в 1948 г., Издательство АН СССР. Выражения для степенных сум корней см. стр. 264.

Доказательство теоремы 1. Пусть z – новая переменная. Для каждого j , $1 \leq j \leq n$, справедливо тождество

$$\frac{1}{1-zx_j} = 1 + zx_j + z^2x_j^2 + \dots$$

Складывая эти тождества при всех $j = 1, \dots, n$, находим

$$\frac{1}{1-zx_1} + \frac{1}{1-zx_2} + \dots + \frac{1}{1-zx_n} = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots \quad (13)$$

Здесь мы считаем $p_0 = n$.

Имеет место тождество

$$x^n - s_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}x + (-1)^ns_n = (x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Дифференцируя его по переменной x , находим

$$\begin{aligned} nx^{n-1} - (n-1)s_1x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1} &= \\ = (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_n) + \dots + (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1}) &= \\ = \left(\frac{1}{x-x_1} + \dots + \frac{1}{x-x_n} \right) (x^n - s_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}x + (-1)^ns_n). \end{aligned}$$

Подставим в это тождество $\frac{1}{z}$ вместо x , умножим результат на z^{n-1} и воспользуемся тождеством (13). После этих преобразований найдём

$$\begin{aligned} n - (n-1)s_1z + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}z^{n-1} &= \\ = (p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots) \cdot (1 - s_1z + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}z^{n-1} + (-1)^ns_nz^n). \end{aligned}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при z^k в левой и правой частях получившегося тождества, находим тождества из утверждения теоремы.

Вернёмся к вычислению сумм Эйлера. Как и ранее, будем использовать обозначения $t_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1}$, $k = 1, \dots, n$.

Задача 9. При каждом $k \geq 1$ существует предел $\gamma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k(t_1, \dots, t_n)}{(2n)^{2k}}$.

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ связаны соотношениями

$$\gamma_k - \frac{\gamma_{k-1}}{3!} + \frac{\gamma_{k-2}}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{\gamma_1}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{k}{(2k+1)!} = 0. \quad (14)$$

Решение. Докажем утверждение индукцией по k . При $k=1, 2$ согласно задаче 7 имеем $\gamma_1 = \frac{1}{6}$, $\gamma_2 = \frac{1}{90}$. Предположим, что для всех степенных сумм с номерами, меньшими k , утверждение доказано. При $n \geq k$ имеет место соотношение (11). Разделив его на $(2n)^{2k}$, устремив n к бесконечности и воспользовавшись индуктивным предположением и результатом задачи 8, получаем существование предела γ_k и соотношение из утверждения задачи 9.

Так, например, используя равенства $\gamma_1 = \frac{1}{6}$, $\gamma_2 = \frac{1}{90}$, находим

$$\gamma_3 = \frac{1}{3!}\gamma_2 - \frac{1}{5!}\gamma_1 + \frac{3}{7!} = \frac{1}{945}.$$

Поэтому $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$. Точно так же находим

$$\gamma_4 = \frac{1}{945 \cdot 3!} - \frac{1}{90 \cdot 5!} + \frac{1}{6 \cdot 7!} - \frac{4}{9!} = \frac{1}{9450}.$$

Аналогично вычисляются и другие коэффициенты. С помощью формулы из задачи 9 и компьютера легко найти, например, что

$$\zeta(40) = \frac{261082718496449122051}{20080431172289638826798401128390556640625} \cdot \pi^{40}.$$

Числа Бернулли

Числа Бернулли B_m определяются рекуррентными соотношениями

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k B_k = 0, \quad m \geq 2. \quad (15)$$

При $m = 2, \dots, 6$ имеем равенства

$$1 + 2B_1 = 0,$$

$$1 + 3B_1 + 3B_2 = 0,$$

$$1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0,$$

$$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0,$$

$$1 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0,$$

из которых следует $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$.

С числами Вернулли обычно связывают одно удобное обозначение. Для каждого многочлена $f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n$ с действительными коэффициентами символом $f(B)$ будем обозначать число

$$f(B) = a_0 + a_1B_1 + \dots + a_nB_n.$$

В этих обозначениях равенство (15) можно переписать в виде

$$(B+1)^m - B^m = 0, \quad m \geq 2.$$

Задача 10. 1) Докажите, что при любом целом $n \geq 1$ выполняется тождество

$$(B+x+1)^n - (B+x)^n = nx^{n-1}. \quad (16)$$

2) Пользуясь тождеством (16) при $x = -\frac{1}{2}$, докажите, что все числа Бернулли с нечётными номерами, большими 1, равны нулю, т.е. $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$.

3) Докажите, что при любом целом $n \geq 1$ выполняется тождество

$$(x+B)^n - (x-1-B)^n = 0. \quad (17)$$

4) Пользуясь тождеством (17) при $x = \frac{1}{2}$, докажите, что при любом целом $k \geq 0$ выполняется равенство

$$\left(B + \frac{1}{2}\right)^{2k+1} = 0. \quad (18)$$

Решение. 1) Справедливы равенства

$$(B+x+1)^n - (B+x)^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{n-k} ((B+1)^k - B^k) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

2) Докажем равенства $B_{2k+1}=0$ с помощью индукции по k . Равенства $B_3=B_5=0$ уже доказаны. Будем поэтому считать, что $k \geq 3$ и все числа Бернулли с нечётными номерами от 3 до $2k-1$ равны нулю. Пользуясь тождеством (16) при $n = 2k+2$ и $x = -\frac{1}{2}$, находим

$$\sum_{j=0}^{2k+1} C_{2k+2}^j B_j \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2-j} \right) = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}. \quad (19)$$

Все слагаемые с четными номерами j равны нулю, так как в этом случае $(1/2)^{2k+2-j} - (-1/2)^{2k+2-j} = 0$. Слагаемые, отвечающие нечетным j с $3 \leq j < 2k+1$ равны нулю по индуктивному предположению. Поэтому равенство (19) может быть переписано в виде

$$(2k+2)B_1 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \right) + (2k+2)B_{2k+1} \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}$$

или так
$$-\frac{2k+2}{2^{2k+1}} + (2k+2)B_{2k+1} = -\frac{2k+2}{2^{2k+1}}.$$

Отсюда следует, что $B_{2k+1} = 0$.

3) Справедливы равенства

$$(x+B)^n - (x-1-B)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} (B^j - (-B-1)^j). \quad (20)$$

При чётном j согласно (15) имеем $B^j - (-B-1)^j = B^j - (B+1)^j = 0$. Если $j > 1$ нечётно, то по (15) и согласно доказанному в пункте 2) имеем $B^j - (-B-1)^j =$

$= B^j + (B+1)^j = 2B_j = 0$. Наконец, при $j=1$ находим $B+B+1=2B_1+1=0$. Итак, все слагаемые в сумме (20) равны нулю. Нужное утверждение доказано.

4) При $x = \frac{1}{2}$ с помощью тождества (17) находим

$$0 = \left(\frac{1}{2} + B\right)^{2k+1} - \left(-\frac{1}{2} - B\right)^{2k+1} = 2\left(\frac{1}{2} + B\right)^{2k+1},$$

что доказывает нужное равенство.

Задача 11. Докажите равенства

$$\gamma_m = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!}, \quad m \geq 1, \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \cdot \pi^{2m}, \quad m \geq 1. \quad (22)$$

Решение. Воспользуемся математической индукцией по m . При $m=1, 2$ равенство (21) проверяется непосредственно.

Предположим теперь, что равенство (21) выполняется для всех индексов $m < k$. Пользуясь равенством (14) и индуктивным предположением, находим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{k-m+1} \frac{\gamma_m}{(2k-2m+1)!} + (-1)^{k-1} \frac{k}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^k \frac{2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!(2k-2m+1)!} + (-1)^{k-1} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2k+1)!} \left(\sum_{j=2}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j - 2k \right) = \\ &= \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2k+1)!} \left(1 + \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j \right). \end{aligned}$$

Из равенства (18) с учётом того, что $B_{2k+1} = 0$, находим

$$1 + \sum_{j=1}^{2k} C_{2k+1}^j 2^j B_j = 2^{2k+1} \left(B + \frac{1}{2} \right)^{2k+1} = 0.$$

Поэтому

$$1 + \sum_{j=1}^{2k-1} C_{2k+1}^j 2^j B_j = -(2k+1) 2^{2k} B_{2k}$$

и

$$\gamma_k = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Это завершает доказательство равенства (21).

Любопытно, что числа Бернулли связаны и с задачей суммирования положительных степеней натуральных чисел. Именно в связи с этой задачей они и были введены Я.Бернулли примерно в 1685 г. в работе о теории вероятностей.

Обозначим

$$\varphi_m(x) = \frac{(B+x)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k x^{m+1-k}, \quad m \geq 1.$$

Так,

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x-1)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} = \left(\frac{x(x-1)}{2} \right)^2,$$

$$\varphi_4(x) = \frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x}{30} = \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1)}{30},$$

$$\varphi_5(x) = \frac{2x^6 - 6x^5 + 5x^4 - x^2}{12} = \frac{(x-1)^2 x^2 (2x^2 - 2x - 1)}{12}.$$

Задача 12. Докажите, что при любом целом $m \geq 1$ выполняется равенство

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \varphi_m(n+1).$$

Например,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Решение задачи 12. Из тождества (16) следует

$$(m+1)k^m = (B+k+1)^{m+1} - (B+k)^{m+1}.$$

Складывая эти равенства при $k = 0, 1, 2, \dots, n$, находим

$$(m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m) = (B+n+1)^{m+1} - B^{m+1},$$

откуда и следует нужное утверждение.

Заключительные замечания

Результаты, обсуждаемые в этой статье, безусловно классические и были получены великими учёными: Я.Бернулли (1654-1705), И.Ньютоном (1643-1727), Л.Эйлером (1707-1783), Б.Риманом (1826-1866).

Так как π – трансцендентное число (Линдеман, 1882), то из формул Эйлера следует иррациональность и трансцендентность значений $\zeta(2m)$, $m \geq 1$. Об арифметической природе значений дзета-функции в нечётных точках практически ничего не известно. Доказано, что число $\zeta(3)$ иррационально (Апери,

1978), что среди чисел $\zeta(2m+1)$, $m \geq 1$, имеется бесконечное множество иррациональных (Ривоаль, 2000). Но даже иррациональность $\zeta(5)$ до сих пор не установлена. Предполагается, что все числа $\zeta(2m+1)$, $m \geq 1$, трансцендентны и, более того, все они вместе с числом π алгебраически независимы над полем рациональных чисел. В частности, никаких соотношений, подобных (22), для значений $\zeta(2m+1)$ существовать не может. Эти гипотезы очень далеки от своего доказательства.

Несмотря на то, что ряд (1) не сходится при $s < 1$, дзета-функцию можно определить и при таких значениях аргумента. Например, при $s > 1$ справедливо тождество

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \quad (23)$$

Можно доказать, что последний ряд сходится при $s > 0$. Поскольку множитель $1-2^{1-s}$ отличен от нуля на множестве $0 < s < 1$, это равенство можно рассматривать как определение дзета-функции в интервале $0 < s < 1$. Более того, ряд, стоящий в правой части равенства (23) сходится при любом комплексном значении переменной s с положительной действительной частью $\Re s$. Равенство (23) можно рассматривать, как определение дзета-функции в комплексной полуплоскости $\Re s > 0$.

В 1859 г. Б. Риман определил дзета-функцию во всей комплексной плоскости и установил ряд её глубоких свойств. Он также первым использовал обозначение $\zeta(s)$ для функции (1), получившей впоследствии название дзета-функция Римана. Дзета-функция обращается в нуль в точках $s = -2, -4, -6, \dots$, а, кроме того, имеет бесконечное количество нулей в полосе $0 < \Re s < 1$, расположенных симметрично относительно прямой $\Re s = 1/2$ и вещественной оси. Риман предположил, что все нули $\zeta(s)$ в полосе $0 < \Re s < 1$, т.е. нули функций

$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$ лежат на прямой $\Re s = 1/2$. Действительные части четырёх

наименьших нулей в самом деле равны $\frac{1}{2}$, а мнимые части имеют вид

$$14, 134725142..., \quad 21, 022039639..., \quad 25, 010857580..., \quad 30, 424876126...$$

К настоящему времени проверено, что первые 10^{13} нулей $\zeta(s)$, расположенные в полосе $0 < \Re s < 1$, действительно лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$. Проверка потребовала очень трудоёмких компьютерных вычислений. Эта гипотеза – знаменитая «гипотеза Римана» не доказана до сих пор.

Наконец, приведём одно элементарное утверждение, эквивалентное гипотезе Римана: для всех $n > 5040$ должно выполняться неравенство $\sigma(n) < e^\gamma n \log \log n$, где $\sigma(n)$ – сумма делителей числа n , а γ – постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772156649...$$