

Виноградов Олег Павлович

*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова.*



Несколько старинных задач по теории вероятностей

Задача 1. Первый игрок бросает шесть игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна единица. Второй игрок бросает двенадцать игральных костей и выигрывает, если выпадут хотя бы две единицы. У кого больше вероятность выиграть?

Решение. Пусть событие A заключается в том, что первый игрок выиграл. Подсчитаем $P(\bar{A})$ – вероятность противоположного события $\bar{A}$, которое заключается в том, что он проиграл, т.е. что при бросании шести игральных костей ни на одной из костей не выпадет единица. Так как события связанные с разными костями являются независимыми событиями и вероятность одновременного наступления независимых событий равна произведению их вероятностей, то $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

Поэтому $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

Пусть событие B заключается в том, что второй игрок выиграл. Подсчитаем $P(\bar{B})$ – вероятность противоположного события $\bar{B}$, которое заключается в том, что он проиграл, т.е. что при бросании двенадцати игральных костей либо не выпадет единица ни на одной из костей либо единица выпадет только на одной из двенадцати костей. Используя независимость и теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем, что

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \left(\frac{1}{6}\right).$$

Поэтому

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \left(\frac{1}{6}\right).$$

Покажем, что $P(A) > P(B)$. Для этого достаточно показать, что

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 > 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \left(\frac{1}{6}\right).$$

Нетрудно видеть, что это неравенство эквивалентно неравенству

$6^6 < 17 \times 5^5$. Так как $6^6 = 46656$ и $17 \times 5^5 = 53125$, то $P(A) > P(B)$.

Замечание. Как указано в [1], эта задача является перефразировкой вопроса, заданного в 1693 году И. Ньютону, который ответил, что «легкие вычисления» показывают преимущество первого игрока.

Задача 2. [2] Бросаются три игральной кости и подсчитывается сумма очков, выброшенных на этих трех костях. К знаменитому физики и математику 17 столетия Галилею один любитель играть в кости обратился с просьбой разъяснить, почему сумма 10 появляется чаще, чем сумма 9? Хотя по его соображениям, эти суммы должны бы появиться одинаково часто.

Решение. Приведем анализ Галилея. Сравним вероятности появления суммы 9 и 10. Всего при бросании трех игральных костей число всех равновозможных событий равно $6^3 = 216$. Сумма 10 появляется в следующих комбинациях:

1+3+6, 1+6+3, 3+1+6;
1+4+5, 1+5+4, 4+1+5;
4+5+1, 5+1+4, 5+4+1;
2+2+6, 2+6+2, 6+2+2;
2+3+5, 2+5+3, 3+2+5;
2+4+4, 4+2+4, 4+4+2;
3+3+4, 3+4+3, 4+3+3.
3+6+1, 6+1+3, 6+3+1;
3+5+2, 5+2+3, 5+3+2;

Первое слагаемое это число очков на 1-ой кости, второе слагаемое – число очков на второй кости, а третье слагаемое – число очков на третьей кости.

Отсюда следует, что сумма 10 появляется в 27 случаях.

Аналогично подсчитаем число тех случаев, когда сумма равна 9.

Сумма 9 появляется в следующих комбинациях:

1+2+6, 1+6+2, 2+1+6;
1+3+5, 1+5+3, 3+1+5;
1+4+4, 4+1+4, 4+4+1;
2+2+5, 2+5+2, 5+2+2;
2+3+4, 2+4+3, 3+2+4;
2+6+1, 6+1+2, 6+2+1;
3+4+2, 4+2+3, 4+3+2;
3+5+1, 5+1+3, 5+3+1;
3+3+3.

Отсюда следует, что сумма 9 появляется в 25 случаях.

Поэтому из формулы классической вероятности вытекает, что вероятность того, что сумма будет 10 равна $\frac{27}{216}$, а сумма 9 равна $\frac{25}{216}$.

Тем самым анализ Галилея подтвердил, что получить сумму 10 более вероятно, чем получить сумму 9.

Задача 3. Какова вероятность выпадения герба, по крайней мере, один раз при двукратном бросании монеты?

Решение. Нужно вычислить вероятность того, что при двукратном бросании монеты герб выпадет либо один раз, либо два раза. По мнению знаменитого французского философа и математика Даламбера, имеется три равновозможных события: 1) герб выпадет два раза, 2) герб выпадет один раз, 3) герб не выпадет ни разу. В двух первых из них появляется герб и поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. На самом деле, эти

события не являются равновозможными. Равновозможными будут четыре события: 1) герб выпадет два раза, 2) герб выпадет при первом бросании, при втором выпадет решка, 3) при первом бросании выпадет решка, герб выпадет при втором

бросании, 4) герб не выпадет ни разу. В трех первых из них появляется герб и поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{4}$.

Задача 4. Рассмотрим задачу, которая, видимо, впервые была упомянута в одной итальянской рукописи, датированной 1380 годом, и носит название задачи о разделе ставки. Этой задачей занимались такие выдающиеся ученые, как Ферма и Паскаль, давшие решение этой задачи независимо друг от друга в 1654 году. Отметим, что известный математик Тарталья (открывший формулу для корней кубического уравнения) дал неверное решение. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть бросается несколько раз правильная монета (заранее число бросаний не определяется). Каждое такое бросание назовем партией. Игрок, который первым выиграет 6 партий, получает приз. Представим себе, что игра по каким-то причинам была остановлена после 8-й партии, причем 1-й игрок выиграл 5 партий, а 2-й игрок – 3. Возникает вопрос: в каком отношении следует разделить приз между игроками?

Решение. Рассмотрим решение этой задачи, которое предложил П. Ферма. Представим себе, что игра не остановилась, а продолжалась еще 3 партии, хотя, может быть,

некоторые из этих партий будут лишними, так как кто-то из этих двух игроков уже мог получить приз до окончания этой серии из трех партий (например, девятую партию выиграет 1-й игрок, и тогда он получит приз). Общее число различных исходов в этих трех партиях равно $2^3 = 8$. Заметим, что второй игрок получит приз только в том случае, если он выиграет все эти три партии. В остальных 7 случаях приз получает первый игрок. Поэтому разумно справедливым считать раздел ставки в отношении 7:1.

Задача 5. Показать, что более вероятно получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей, чем хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей.

Как указано в [1] задача 5 «возникла за игорным столом и что в 1654 году де Мере предложил ее Паскалю. Как полагают, этот случай оказал большое стимулирующее воздействие на развитие теории вероятностей. На самом деле эта задача была поставлена Кардано (1501- 1576)».

Решение этой задачи предоставляется читателю.

Ответ: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,517747...$ и

$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,491404...$

Литература

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.1, М.: Мир, 1984.
2. С.П. Виноградов. Элементы теории вероятностей. Изд. 3-е. – М.: ЛЕНАНД, 2021.