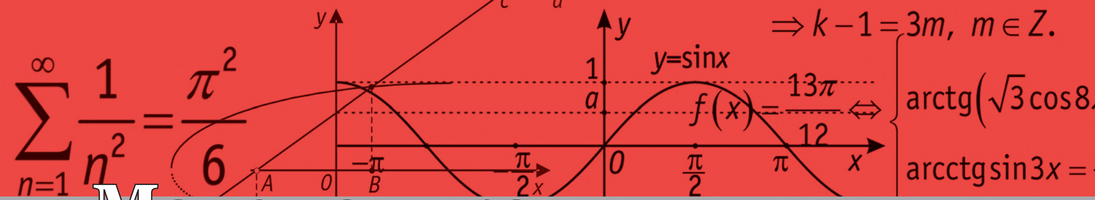

**Комбаров Анатолий Петрович**
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей топологии и геометрии
механико-математического факультета МГУ

# Об одной задаче Паппа

Как известно, Аналитическая геометрия – это раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры. Название «Аналитическая геометрия» утвердилось только в конце XVIII века, а до того Аналитическую геометрию называли Декартовой геометрией. И вот почему: Рене Декарт (1596 – 1650) в 1637 году опубликовал книгу «Геометрия», в которой предложил способ изучения геометрических объектов с помощью алгебры и арифметики, используя метод координат. Заметим, что немного раньше юрист, советник суда в Тулузе и выдающийся математик Пьер Ферма (1607 – 1665) в 1636 году написал трактат «Введение в изучение плоских и телесных мест», в котором также использовал метод координат. Но Ферма почти ничего не публиковал и сообщал о своих математических открытиях в письмах к математикам. Трактат Ферма был опубликован только после смерти Ферма – в 1679 году. Аналитическая геометрия расширила возможности евклидовой геометрии. До Декарта и Ферма для каждой задачи в геометрии требовалось изобретать свой оригинальный метод решения, что не всегда было простым делом. Замечательное открытие принадлежало Декарту, придумавшему мощный алгебраический метод решения геометрических задач. Декарт был в восторге от придуманного им метода и даже выдвинул тезис об универсальности алгебраического подхода.

Как же получилось, что Ферма и Декарт независимо и практически одновременно открыли метод координат? Дело в том, что им было известно сочинение «Математическое собрание» древнегреческого геометра Паппа Александрийского (III век н.э.). Папп был прекрасным знатоком классической античной геометрии. Сочинение Паппа состояло из восьми книг, в которых, в частности, был представлен список геометрических задач, о которых Папп написал, что не может их решить. Необходимо здесь отметить, что во времена Паппа «решить задачу» означало проделать соответствующее построение циркулем и линейкой, другие инструменты не допускались. И Ферма и Декарт изучили сочинение Паппа и с помощью изобретенного ими метода координат свели геометрические задачи к алгебре и легко справились почти со всеми задачами из списка Паппа. Известно, что следующая задача из списка Паппа, не решенная самим Паппом, послужила для Декарта первым образцом приложения созданной им теории.

**Задача Паппа.** *На биссектрисе угла дана точка. Пользуясь только циркулем и линейкой (без делений) через эту точку провести прямую, дающую в угле отрезок данной длины.*

Задача Паппа интересна еще и тем, что в свое время эта задача иногда предлагалась в МГУ на устном вступительном экзамене по математике, разумеется, без упоминания Паппа.

Прежде чем приступить к решению задачи Паппа, сделаем несколько предварительных замечаний. Прежде всего обратим внимание на то, что до Декарта умножение двух отрезков представляли как построение прямоугольника со сторонами, равными этим отрезкам, то есть произведение двух длин считалось площадью. Соответственно, произведение трех длин считалось объемом. Огромной заслугой Декарта являлось то, что он показал, что если выбрана некая единица длины, то величины независимо от их размерности могут быть представлены с помощью соответствующего отрезка. Поэтому каждому отрезку $x$ и многочлену $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ с целыми или рациональными коэффициентами можно сопоставить отрезок $P(x)$. Это утверждение и составляет основу аналитической геометрии, созданной Декартом.

Как же построить отрезок $b \cdot c$, если даны отрезки $b$ и $c$, а также единичный отрезок $e$? Разумеется, с помощью теоремы Фалеса (см. рис.1). При этом, конечно, необходимо уметь строить циркулем и линейкой прямую, параллельную данной. Таким образом, исходя из отрезка $x$, мы можем построить отрезки $x^2$, $x^3 = x^2 \cdot x$ и т.д. Кроме того, мы, конечно, умеем делить отрезок на конечное число равных отрезков (опять же с помощью теоремы Фалеса!) и складывать (вычитать) отрезки (на одной прямой). В конце концов, отрезок $P(x)$ будет построен циркулем и линейкой. Также нетрудно построить корень квадратный из отрезка: на рисунке 2 мы видим отрезок $AB$, являющийся суммой отрезков $AC = a$ и $CB = e$, где $e$ – единичный отрезок. На отрезке $AB$

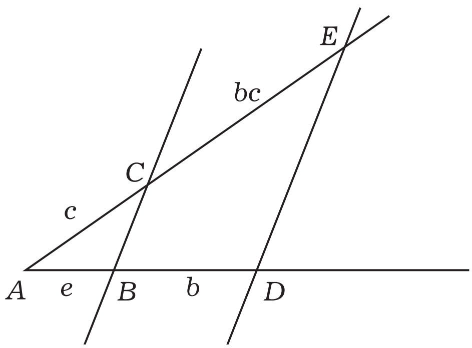


*Рис. 1.*

как на диаметре построена окружность. Отрезок $CD$ – половина хорды, перпендикулярной к диаметру $AB$. Докажите, что $CD=\sqrt{a\cdot e}=\sqrt{a}$. Таким образом, циркулем и линейкой можно построить любое алгебраическое выражение, содержащее умножение отрезков на рациональные числа, сложение и вычитание отрезков и квадратные корни из отрезков. Оказывается, ничего другого построить циркулем и линейкой нельзя! Об этом хорошо написано в книгах [2, 3, 4].

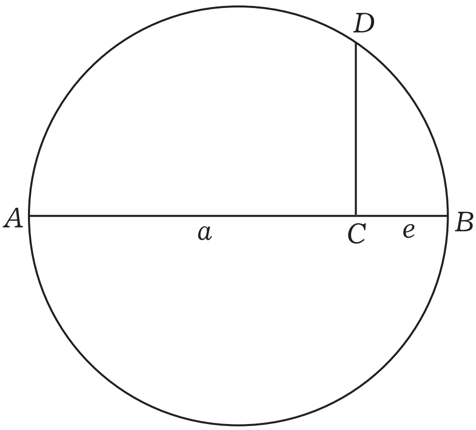


*Рис. 2.*

Теперь рассмотрим решение задачи Паппа. Итак, пусть дан угол $A$, равный $2\alpha$, точка $M$ на биссектрисе угла, удаленная от вершины угла на расстояние $m$, и отрезок $BC$, длина которого равна $2a$. Проанализируем сначала условие задачи. Предположим, что требуемая прямая уже проведена через точку $M$ и пересекает стороны угла в точках $B$ и $C$. Опишем около треугольника $ABC$ окружность (см. рис.3).

Через середину $D$ стороны $BC$ проведем диаметр окружности.

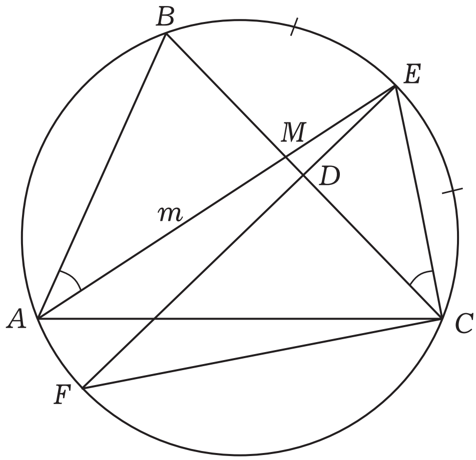


*Рис. 3.*

Тогда биссектриса $AM$ угла $BAC$ и диаметр окружности пересекутся в точке $E$, лежащей на окружности. Дуга $BE$ будет равна дуге $EC$. Другую точку пересечения диаметра с окружностью обозначим через $F$. $FE\perp BC$. $\triangle CED$ подобен $\triangle FEC$, поэтому $CE^2 = FE\cdot DE$. Далее, $\triangle DEM$ подобен $\triangle AEF$, поэтому

$$FE\cdot DE=ME\cdot AE.$$

Следовательно, $CE^2 = ME \cdot AE$. Из $\triangle CED$ находим $CE=\frac{a}{\cos\alpha}$. Далее, $ME = AE - m$. Заменяя, получим

$$\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2=(AE-m)AE\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE^2-mAE-\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2=0.$$

Учитывая, что $AE > m$, получаем $AE=\frac{m}{2}+\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2}$. Итак, отрезок $AE$ выражается через квадратный корень и, следовательно, как мы уже отметили выше, может быть построен с помощью циркуля и линейки. В самом деле, отрезок длины $\frac{a}{\cos\alpha}$ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетом длины $a$ и прилежащим углом величиной $\alpha$. Заметим, что угол $\alpha$ в этой задаче острый. Отрезок, заданный квадратным корнем $\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2}$ мы построим немного иначе, а именно, как гипотенузу треугольника с катетами длины $\frac{m}{2}$ и $\frac{a}{\cos\alpha}$. Построив отрезок $AE$, откладываем его на биссектрисе от вершины $A$. Затем из точки $E$ делаем засечку радиусом $CE=\frac{a}{\cos\alpha}$ на стороне угла в точке $C$, и, наконец, проводим прямую $CM$.

Возникает естественный вопрос, при каких значениях параметров $\alpha$, $m$ и $a$ задача имеет решение? Для ответа на этот вопрос найдем отрезок $BM$ (ведь он должен существовать!). Хорды $AE$ и $BC$ пересекаются в точке $M$ , поэтому $AM \cdot ME = BM \cdot MC$. После замены получаем $m(AE-m)=BM(2a-BM)$, что с учетом уже найденной величины отрезка $AE$ равносильно уравнению

$$BM^2-2aBM+$$
$$+m\left(\frac{m}{2}+\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2}\right)-m^2=0.$$

Отрезок $BM$ существует в том и только в том случае, когда дискриминант этого уравнения неотрицателен.

$$\mathcal{D}=a^2+\frac{m^2}{2}-m\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2}\geq 0.$$

Переносим квадратный корень вправо, возводим в квадрат и после очевидных преобразований получаем

$$a\geq m\operatorname{tg}\alpha.$$

Условие имеет простую геометрическую интерпретацию: а именно, число $2m$ tg $\alpha$ является длиной отрезка, высекаемого сторонами угла на прямой, проходящей через точку $M$ перпендикулярно биссектрисе угла. Следовательно, задача имеет решение, когда длина этого отрезка не превосходит длины отрезка, данного в условии задачи Паппа.

А теперь немного изменим формулировку задачи Паппа.

**Задача.** *Внутри угла дана точка. Пользуясь только циркулем и линейкой (без делений) через эту точку провести прямую, дающую в угле отрезок данной длины.*

Оказывается, в общем случае решение этой задачи невозможно. Приведем простой пример, показывающий это. Возьмем на плоскости прямоугольную систему координат $XOY$ и рассмотрим угол между положительными направлениями осей абсцисс и ординат. Докажем, что невозможно циркулем и линейкой провести прямую через точку $M$ с координатами (1, 2) так, чтобы отрезок, высекаемый сторонами угла на прямой, равнялся 5 (см. рис. 4).

Общий вид прямой, проходящей через точку M(1,2), имеет вид

$$y-2=k(x-1),$$

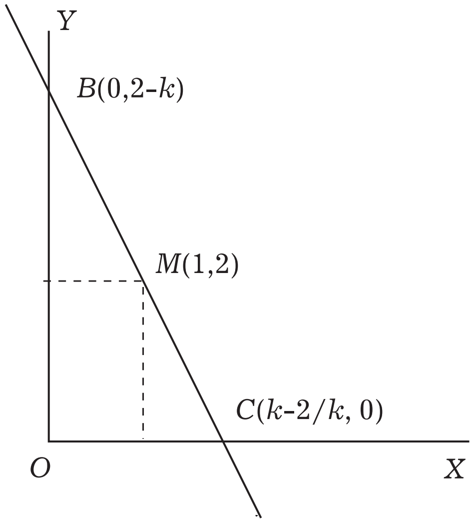


*Рис. 4.*

где $k$ − угловой коэффициент (очевидно, отрицательный). Задача будет решена, если мы сможем циркулем и линейкой построить угол, тангенс которого равен $k$. Это возможно только тогда, когда число $k$ можно выразить через квадратные корни. Точки пересечения со сторонами угла имеют координаты $B(0{,}2-k)$ и $C(\frac{k-2}{k},\ 0)$. Получаем уравнение для нахождения $k$:

$$BC=\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)^2+(2-k)^2}=5.$$

После возведения в квадрат и преобразований получаем уравнение четвертой степени

$$k^4-4k^3-20k^2-4k+4=0.$$

Такие уравнения решают методом итальянского математика Лодовико Феррари (1522 − 1565). После замены $k=t+1$ получаем

$$t^4-26t^2-52t-23=0.$$

Известно, что *уравнение*

$$t^4+At^2+Bt+C=0$$

*с целыми коэффициентами A, B и C разрешимо в квадратных корнях тогда и только тогда, когда разрешимо в квадратных корнях уравнение третьей степени, называемое резольвентой данного уравнения четвертой степени* и получающееся по методу Феррари следующим образом:

$$z((z+A)^2-4C)=B^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3+2Az^2+(A^2-4C)z-B^2=0.$$

Также известно, что *если уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то оно неразрешимо в квадратных корнях*. (Доказательство можно найти в книге [3].) И это все, что нам потребуется для доказательства невозможности требуемого построения.

Итак, выписываем резольвенту (в переводе «разрешающее» уравнение):

$$z^3-52z^2+768z-2704=0.$$

Пусть $\frac{p}{q}$ − несократимая дробь ($p$ − целое число, $q$ − натуральное).

Подставив $z=\frac{p}{q}$ в уравнение и немного упростив, получим уравнение

$$p^3-52p^2q+768pq^2-2704q^3=0.$$

Очевидно, что число $p$ четное. Заменяя $p=2p'$, получаем

$$8p'^3-52\cdot4p'^2q+768\cdot2p'q^2-2704q^3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p'^3-26p'^2q+192p'q^2-338q^3=0.$$

Снова замечаем, что число $p'$ четное. Заменяя $p' = 2p''$, получаем

$$8p''^3 - 26 \cdot 4p''^2 q + 192 \cdot 2p'' q^2 - 338q^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p''^3 - 52p''^2 q + 192p'' q^2 - 169q^3 = 0.$$

Число $q$ также оказалось четным и дробь сократима вопреки нашему предположению. Поэтому резольвента не имеет рациональных корней. Следовательно, требуемое построение невозможно.

Итак, Декарт и Ферма с помощью аналитической геометрии решили почти все задачи из списка Паппа, но не все задачи. В списке Паппа были и задачи, с которыми Декарт и Ферма справиться не могли. Поэтому в заключение напомним о трех знаменитых задачах древности, известных и Паппу. Многочисленные попытки решить эти задачи привели математиков к мысли о необходимости научиться доказывать неразрешимость этих и некоторых других задач.

*Задача об удвоении куба* – одна из трех знаменитых задач древности. По преданию, на острове Делос, считавшемся родиной Аполлона, произошла эпидемия чумы. Перепуганные жители отправили делегацию в святилище Аполлона за советом, как умилостивить богов. Жрецы сказали, что для этого надо удвоить кубический жертвенник храма Аполлона. Жители Делоса соорудили такой же куб и поставили его на первый куб. Эпидемия не прекратилась. Жрецы объяснили, что удвоенный жертвенник также должен быть кубом. На алгебраическом языке это означает, что по отрезку $a$ необходимо циркулем и линейкой построить отрезок $b$, такой, что $b^3 = 2a^3$. Невозможность такого построения следует из того, что кубическое уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней. Подробное доказательство можно прочитать, например, в книге [3].

Еще в V в. до н.э. греческие математики пытались найти общий способ разделить с помощью циркуля и линейки произвольный угол на три равные части. Так возникла *задача о трисекции угла*. Эта задача также оказалась в общем случае неразрешимой. В книге [3] показывается невозможность трисекции угла в $30°$, а в книге [4] рассказывается, как в 1837 году французский математик Ванцель доказал невозможность трисекции произвольного угла циркулем и линейкой.

Более двух с половиной тысяч лет назад греческие математики сформулировали задачу построения циркулем и линейкой квадрата, площадь которого равна площади заданного круга. Так появилась знаменитая *задача о квадратуре круга*. Невозможность такого построения была доказана только в 1882 году Линдеманом, доказавшим трансцендентность числа $\pi$. Интересные подробности можно найти в книге [4].

## Литература

1. *И.И. Александров.* Сборник геометрических задач на построение. Учпедгиз. М.: 1954.
2. *Б.Л. ван дер Варден.* Алгебра. Наука. М.: 1976.
3. *В.В. Прасолов.* Геометрические задачи древнего мира. Фазис. М.: 1997.
4. Энциклопедия для детей Аванта$^+$, том 11. Математика. Аванта$^+$. М.: 2003.